

# Capítulo 4: Modelado matemático de los sistemas dinámicos

[carlos.platero@upm.es](mailto:carlos.platero@upm.es) (C-305)

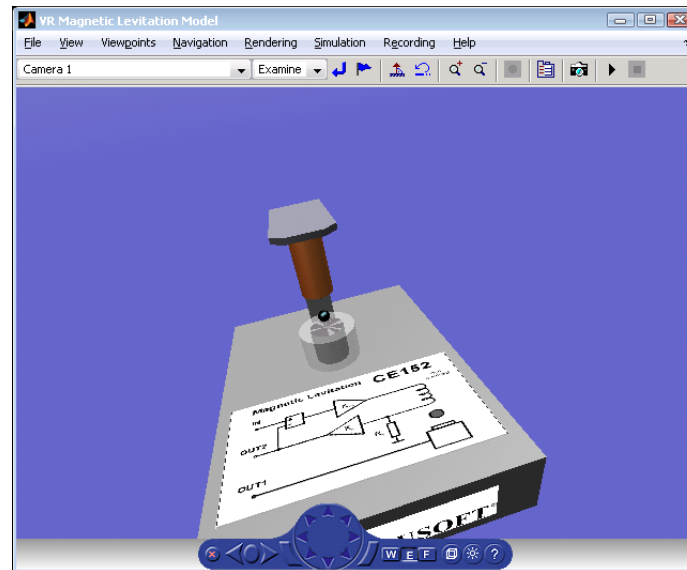
# Modelado matemático de los sistemas dinámicos

## ▶ Simuladores:

- ▶ Modelos matemáticos de los sistemas y de las señales que les atacan
- ▶ Una mayor sofisticación de los modelos supondrá que se aproxime más verazmente al comportamiento físico

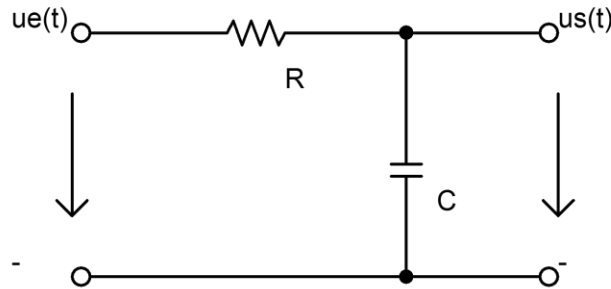
## ▶ Modelos

- ▶ Eléctricos
- ▶ Mecánicos
- ▶ Térmicos



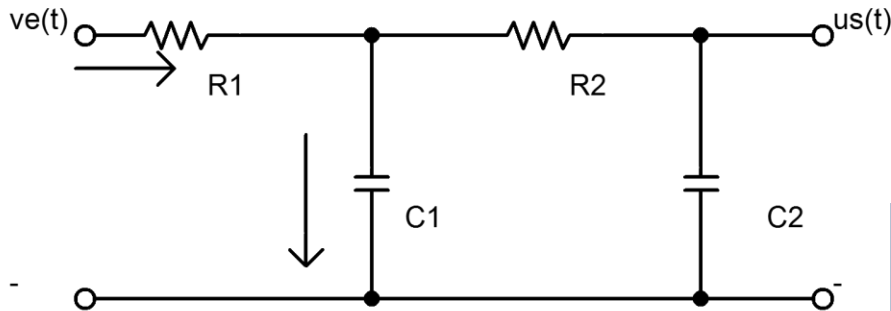
# 4.1 Sistemas eléctricos y electrónicos

## ► Leyes de Kirchhoff



$$A_V(s) = \frac{1}{1 + RCs}$$

## ► Adaptación de impedancias

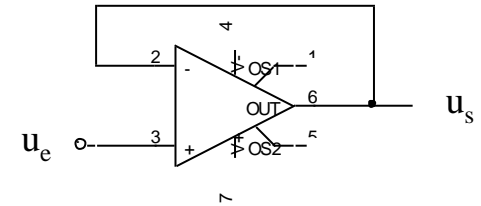


~~$$A_V(s) = A_{V1}(s) \cdot A_{V2}(s) = \frac{1}{1 + R_1 C_1 s} \cdot \frac{1}{1 + R_2 C_2 s}$$~~

$$A_V(s) = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) s + 1}$$

# Amplificadores operacionales

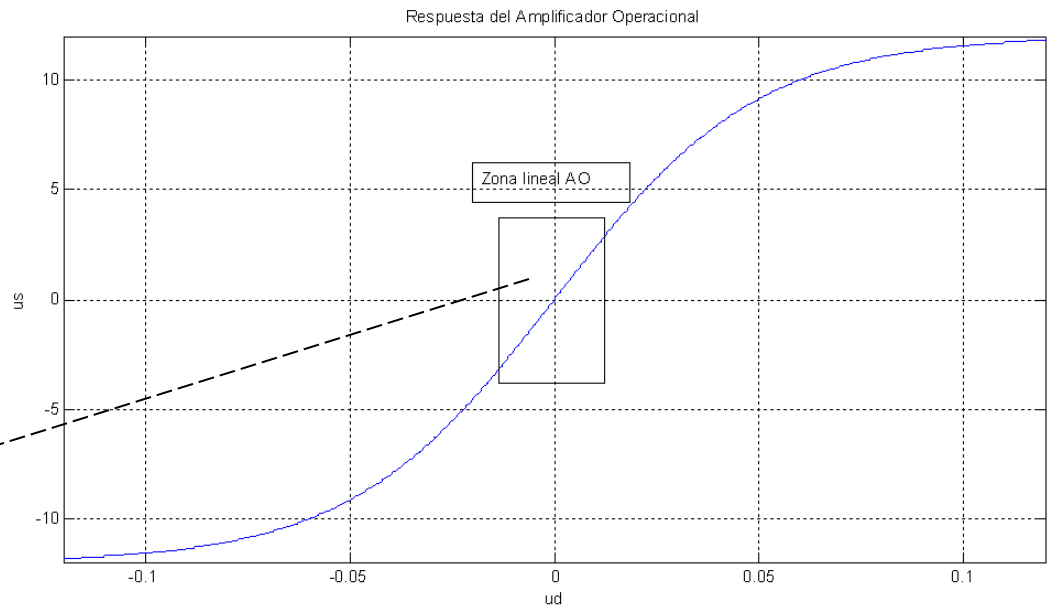
- ▶ Las características de un AO ideal son:
  - ▶ La impedancia de entrada diferencial y la de cada canal respecto a masa son infinitas.
  - ▶ Ganancia de tensión diferencial infinita,  $A_{do}$ .
  - ▶ Ancho de banda infinito.
  - ▶ Tensión de desviación de continua nula
  - ▶ Ausencia de desviación de las anteriores características con la temperatura.



$$u_d = u_+ - u_-$$

$$u_s = \begin{cases} +V_c & u_d > V_T \\ A_{do} \cdot u_d & |u_d| < V_T \\ -V_c & u_d < -V_T \end{cases}$$

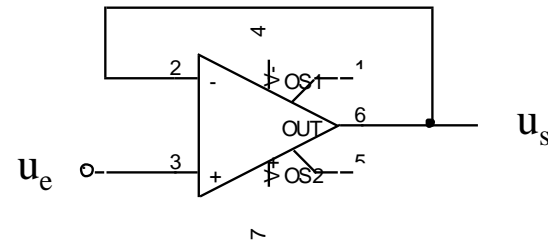
$$|u_d| < V_T \rightarrow u_+ \cong u_-$$



# Aplicaciones de los AO

## ▶ Seguidor de tensión

$$u_s(t) = u_e(t)$$

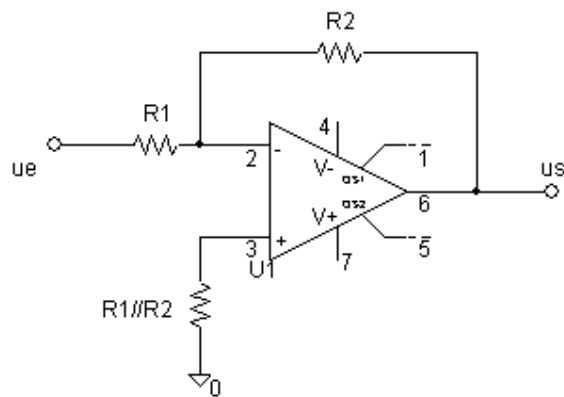
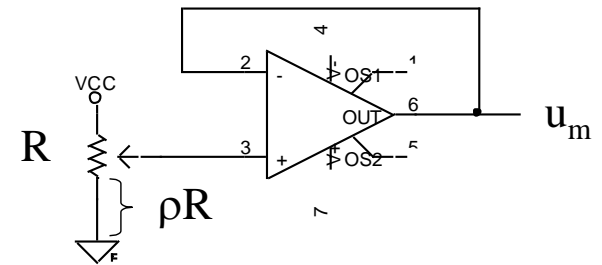


## ▶ Adaptador de señal de mando

$$u_m(t) = V_{CC} \frac{\zeta R}{(1-\zeta)R + \zeta R} = V_{CC} \zeta$$

$$0 \leq \zeta \leq 1$$

## ▶ Amplificador inversor

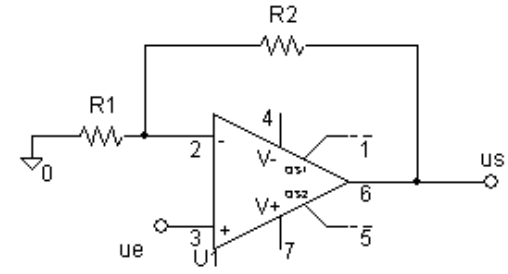


$$i = \frac{u_e(t)}{R_1} = -\frac{u_s(t)}{R_2} \rightarrow \frac{u_s(t)}{u_e(t)} = -\frac{R_2}{R_1}$$

# Aplicaciones de los AO

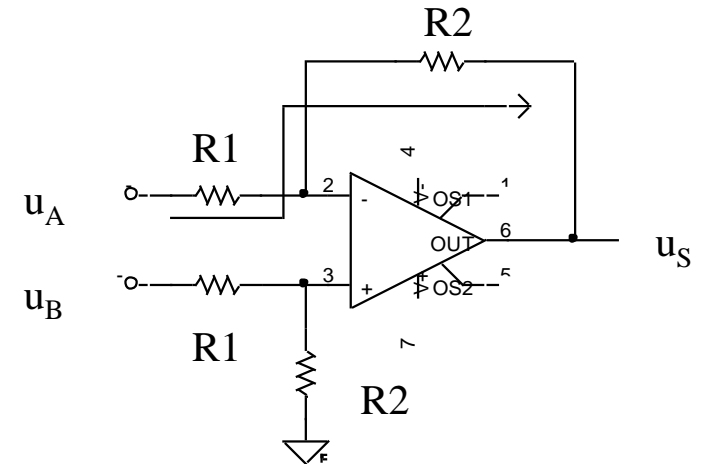
## ▶ Amplificador no inversor

$$i = \frac{u_e(t)}{R_1} = \frac{u_s(t) - u_e(t)}{R_2} \rightarrow \frac{u_s(t)}{u_e(t)} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$



## ▶ Amplificador diferencial

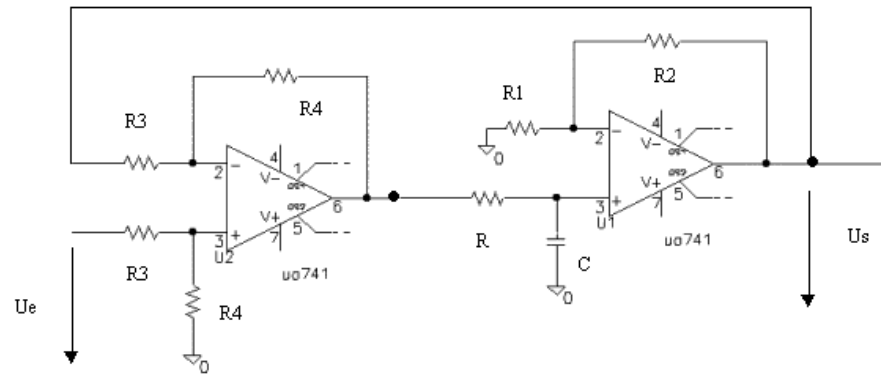
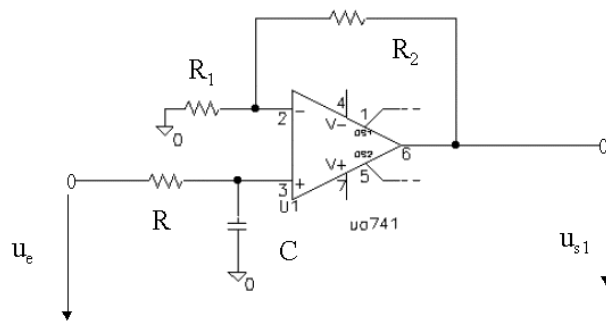
$$\left. \begin{aligned} u_s &= A_1 u_B + A_2 u_A \\ A_1 &= \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_2}{R_1} \\ A_2 &= -\frac{R_2}{R_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_s = \frac{R_2}{R_1} (u_B - u_A)$$



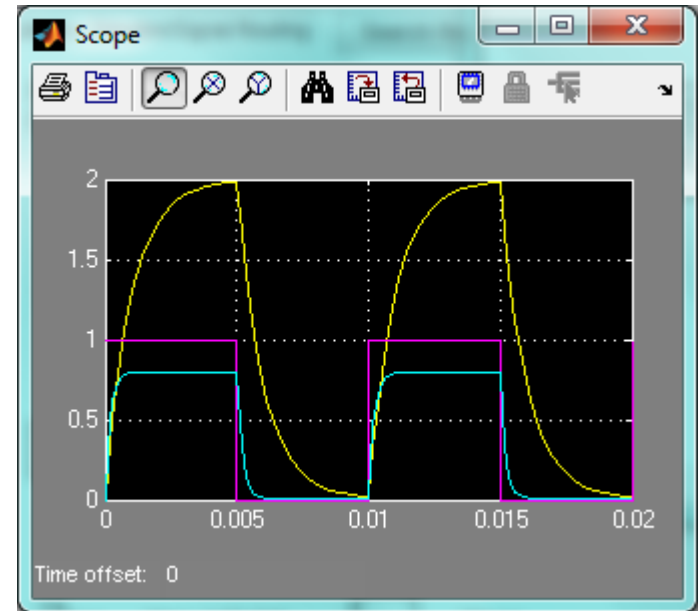
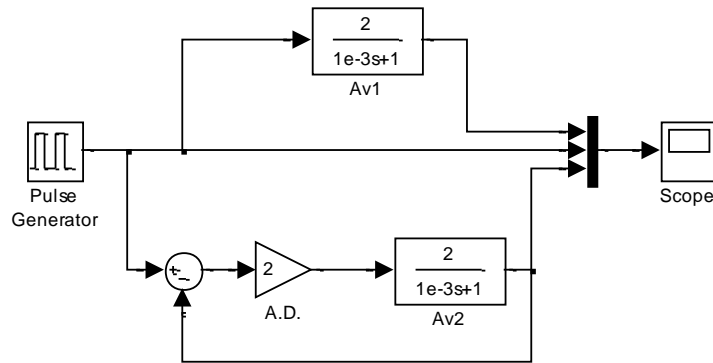
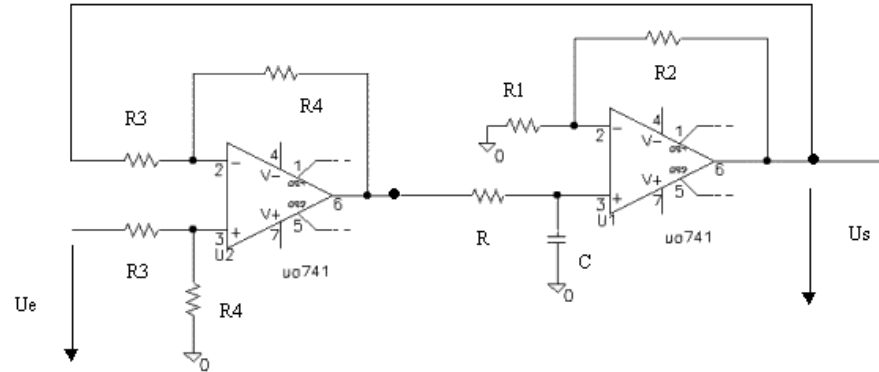
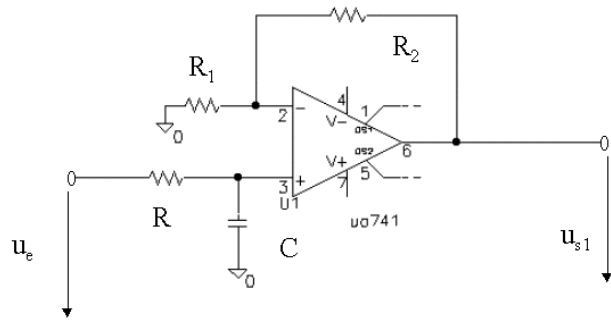
# Problema de la práctica del laboratorio

Alimentando los AOs con  $\pm 12V$  y utilizando una excitación de señal cuadrada de  $1V$  de amplitud y frecuencia  $100\text{ Hz}$ , con un nivel de continua nulo, experimentar con los circuitos de las figuras:

1. Para el circuito de la figura izquierda y con la excitación mencionada, obtener las formas de ondas tanto de  $u_e$  como de  $u_{s1}$ . Utilizar los valores de  $R=100k\Omega$ ,  $C=10\text{ nF}$ ,  $R_1=33k\Omega$  y  $R_2=33k\Omega$
2. Lo mismo que en 1) pero con  $R_2 = 68k\Omega$
3. Realizando el montaje de la figura derecha y con la excitación de señal cuadrada, representar la señal de salida,  $u_s$ , con  $R_2 = 33k\Omega$  y  $R_2=68k\Omega$ . Valores de  $R_3=33k\Omega$  y  $R_4=68k\Omega$ .



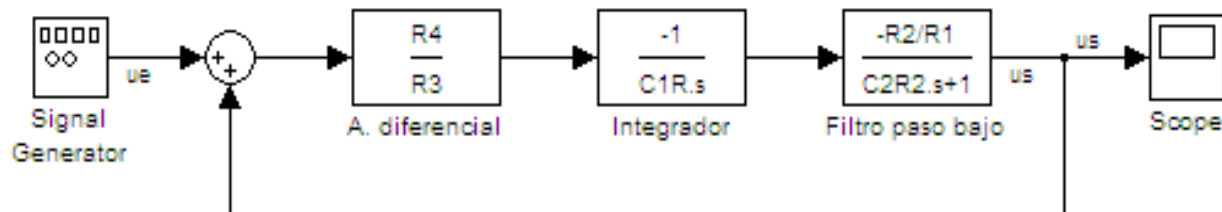
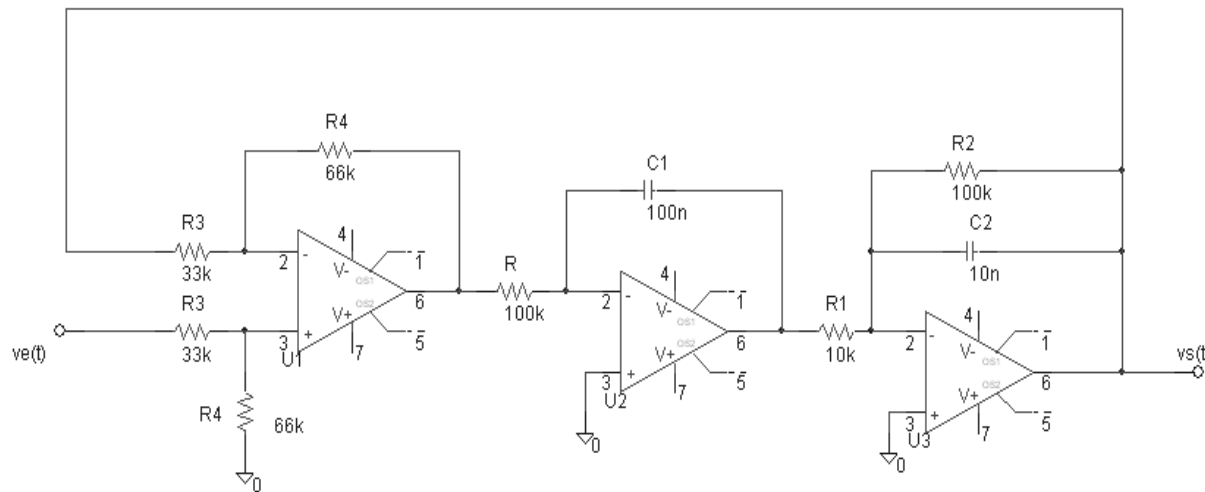
# Problema de la práctica del laboratorio





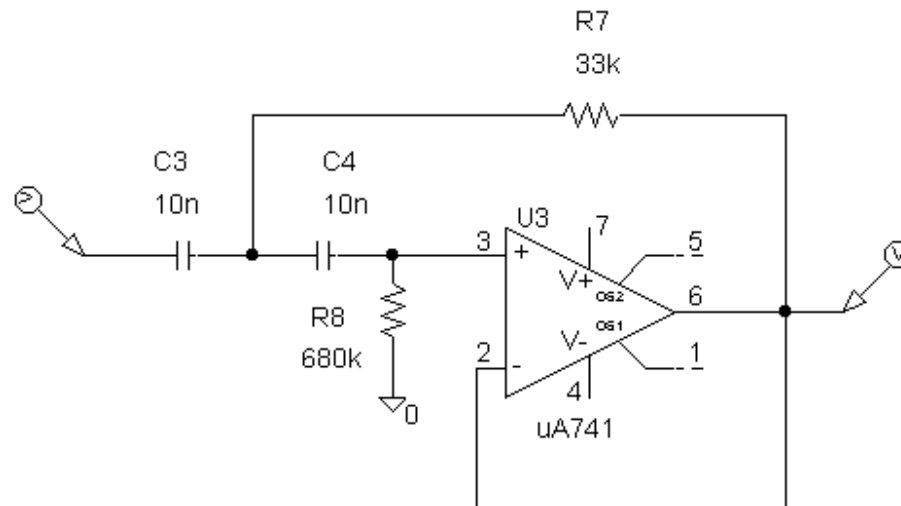
# Examen final de julio 2016

Dibujar el diagrama a bloques y demostrar que la ganancia de la cadena abierta es:

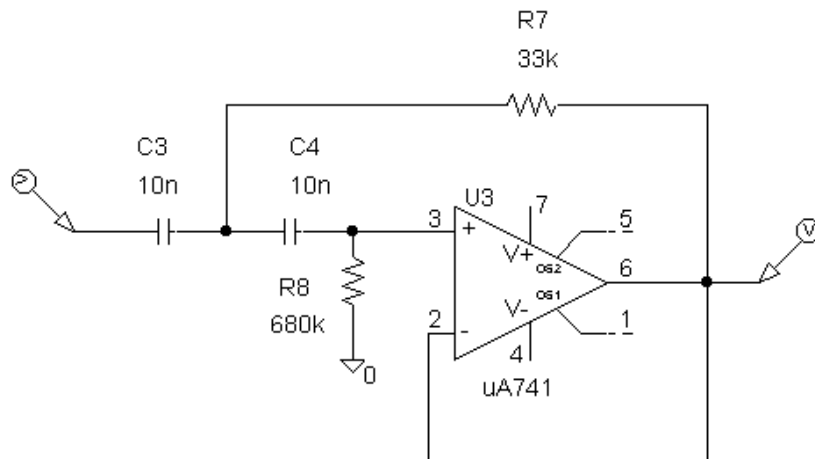
$$GH = \frac{2 \cdot 10^3}{s(1 + s \cdot 10^{-3})}$$


## Filtro paso alto de segundo orden de Sallen-Key

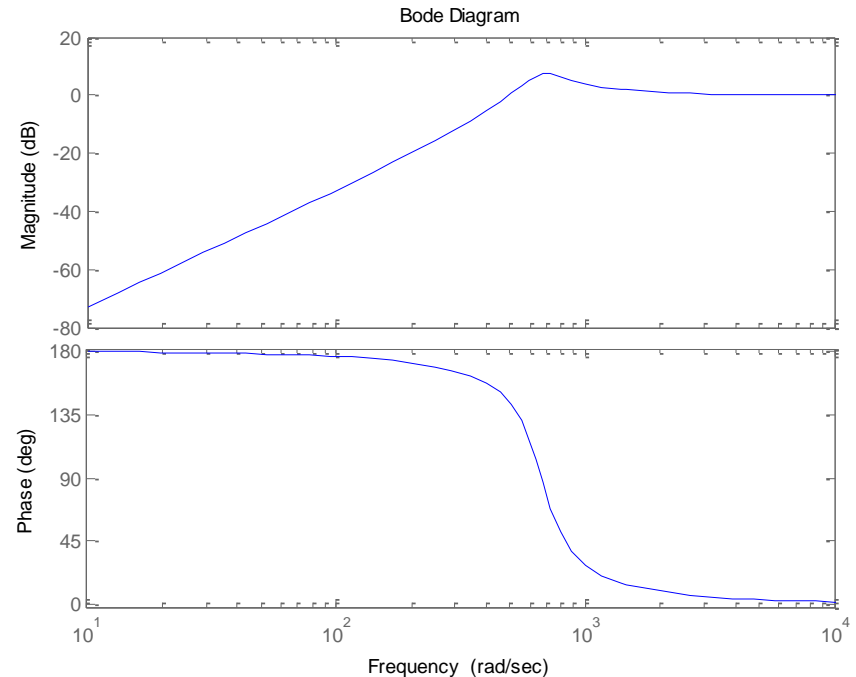
Determinar la ganancia de tensión del filtro con AO ideal, y habiendo definido como  $C$  el valor de  $C3$  y  $C4$ .



# Filtro paso alto de segundo orden de Sallen-Key

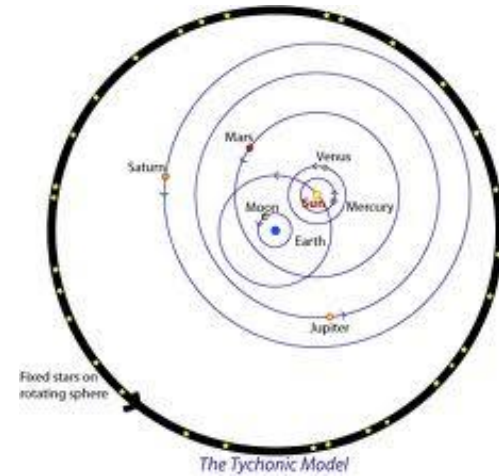
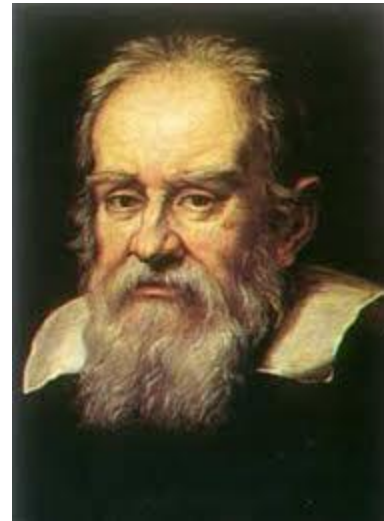


$$A_V(s) = \frac{C_3 C_4 R_7 R_8 s^2}{C_3 C_4 R_7 R_8 s^2 + C_4 R_7 s + C_3 R_7 s + 1}$$



```
>> C3=1e-8;  
>> C4=C3;  
>> r7=33e3;  
>> r8=680e3;  
>> av=tf([C3*C4*r7*r8 0 0],[C3*C4*r7*r8 C3*r7+C4*r7 1])  
>>bode(av)
```

## 4.2 Sistemas mecánicos



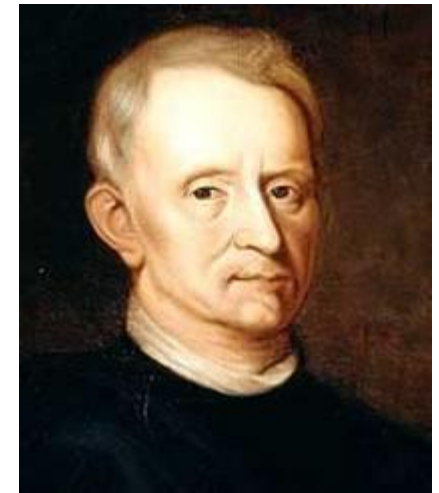
# Leyes de Newton

---

Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado a cambiar su estado por fuerzas impresas sobre él.

El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.

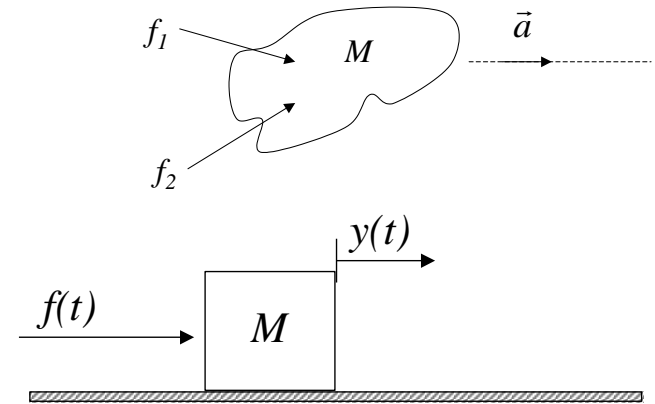
Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: o sea, las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en sentido opuesto.



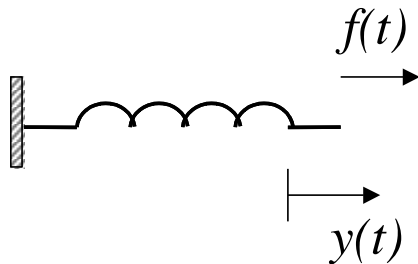
## 4.2 Sistemas mecánicos

### ► Movimiento de traslación

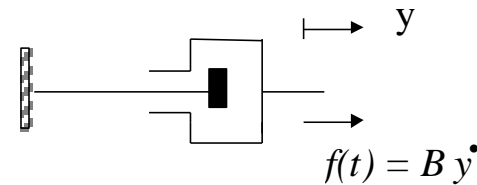
- Masa
- Resorte lineal
- Fricción (mov.traslación)



$$f(t) = M \ddot{y}(t)$$



$$f(t) = ky(t)$$



$$f(t) = B\dot{y}(t)$$

# Movimiento de traslación

---

## ► Sistemas de unidades

Magnitud Física	S.I.
Fuerza	N
Masa	kg
$k$	N/m
$B$	Ns/m

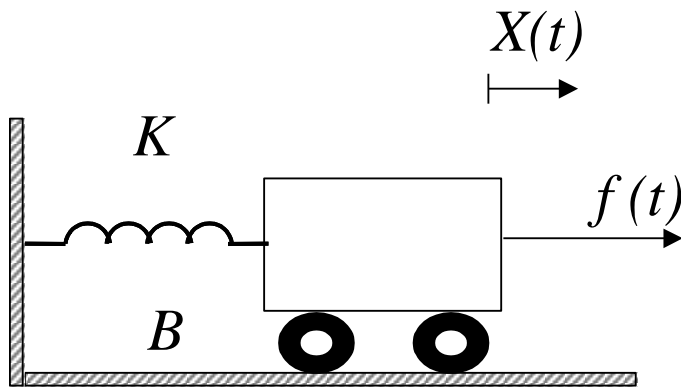
## ► Sistemas análogos

movimiento de traslación	sistema eléctrico
fuerza	corriente
desplazamiento	potencial

## Ejemplo 4.1

---

- ▶ Obtener la relación causa efecto entre la fuerza aplicada a un carro sujeto a la pared a través de un muelle y el desplazamiento que se produce en éste. La masa del carro es  $M$ , el coeficiente del resorte es  $K$  y el rozamiento entre las ruedas y la superficie se modela con el coeficiente de rozamiento  $B$ . Considere condiciones iniciales nulas.



$$F(t) = M \ddot{x}(t) + Kx(t) + B \dot{x}(t)$$

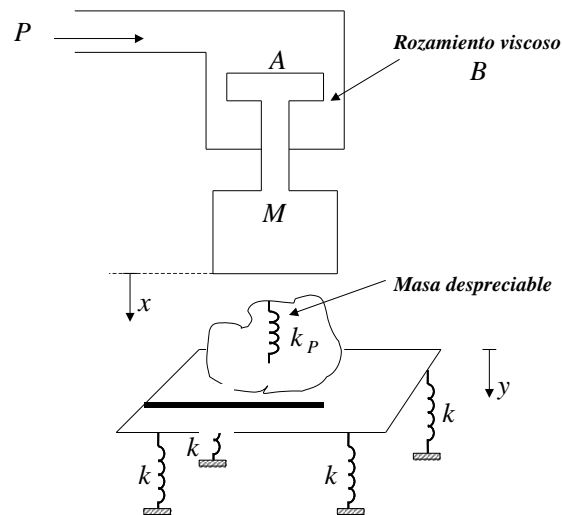
$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$$



# Ejemplo 4.2

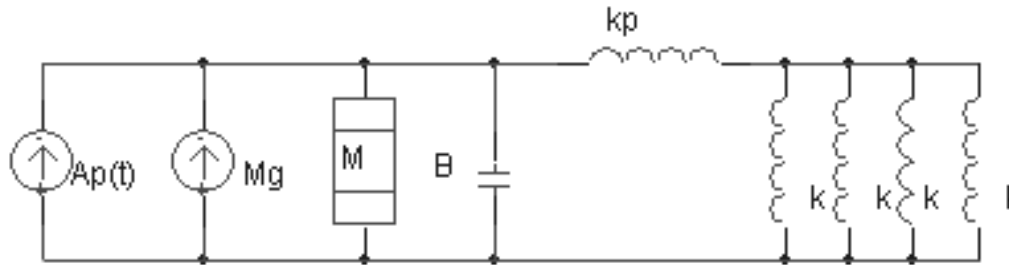
El esquema de la figura muestra el comportamiento dinámico de una prensa hidráulica. Al dar presión al fluido,  $P$ , transmite una fuerza sobre el pistón que al desplazarse comprimirá al cuerpo. Este efecto se modela por un muelle, cuya constante es  $k_p$ . Además, se considera despreciable la masa del cuerpo a comprimir respecto al de la prensa. No así la masa del pistón, al que se le asigna por la letra  $M$ . La dinámica del tablero, donde se apoya el cuerpo, es modelada por cuatro amortiguadores de constante  $k$ . Se pide:

1. Ecuaciones físicas del sistemas
2. Linealizar el sistema cuando la presión del fluido sea nula,  $P=0$ .
3. Diagrama a bloques
4. FDT entre la causa, variación de la presión, y el efecto, grado de compresión del cuerpo.



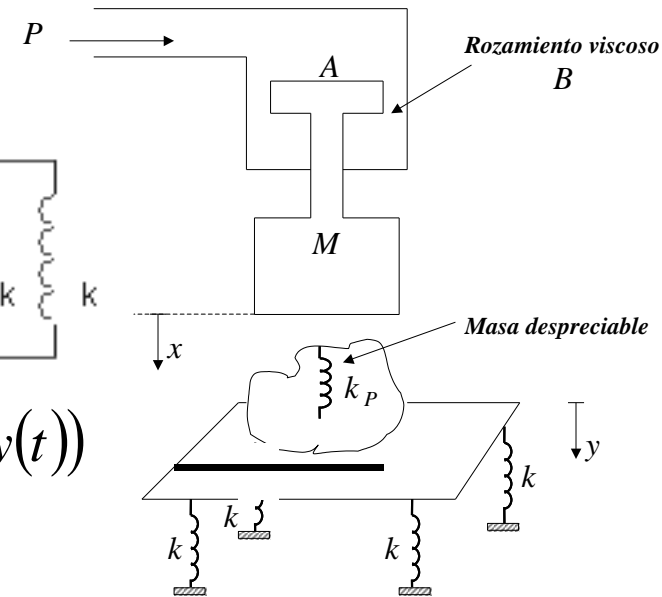
# Ejemplo 4.2

## 1. Ecuaciones físicas del sistemas



$$Ap(t) + Mg = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + k_p(x(t) - y(t))$$

$$k_p(x(t) - y(t)) = 4ky(t)$$



## 2. Linealizar el sistema cuando la presión del fluido sea nula, P=0.

$$Mg = K_p(x_0 - y_0) = 4ky_0$$

$$y_0 = \frac{Mg}{4k}; \quad x_0 = \frac{Mg}{k_p} + y_0 = Mg \left( \frac{1}{k_p} + \frac{1}{4k} \right)$$

$$A\Delta p(t) = M\Delta\ddot{x}(t) + B\Delta\dot{x}(t) + k_p\Delta z(t)$$

$$k_p\Delta z(t) = 4k(\Delta x(t) - \Delta z(t))$$

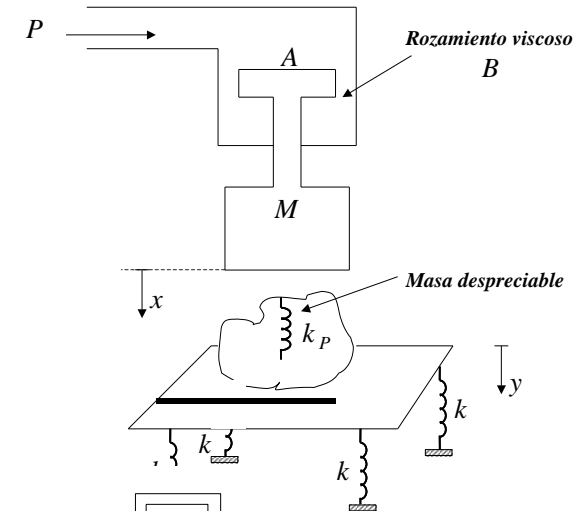
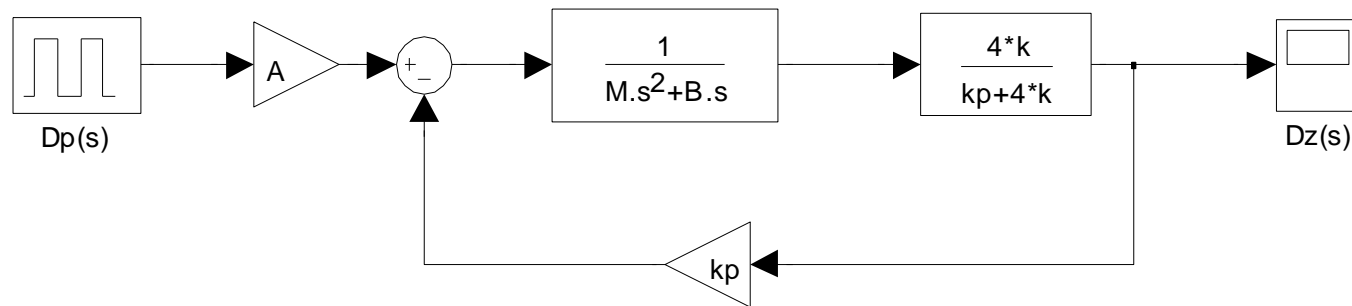


# Ejemplo 4.2

## 3. Diagrama a bloques

$$A\Delta p(s) - k_p \Delta z(s) = (Ms^2 + Bs)\Delta x(s)$$

$$\Delta z(s) = \frac{4k}{k_p + 4k} \Delta x(s)$$



4. FDT entre la causa, variación de la presión, y el efecto, grado de compresión del cuerpo.

$$\frac{\Delta z(s)}{\Delta p(s)} = A \cdot \frac{4k}{(Ms^2 + Bs)(k_p + 4k) + 4k \cdot k_p}$$



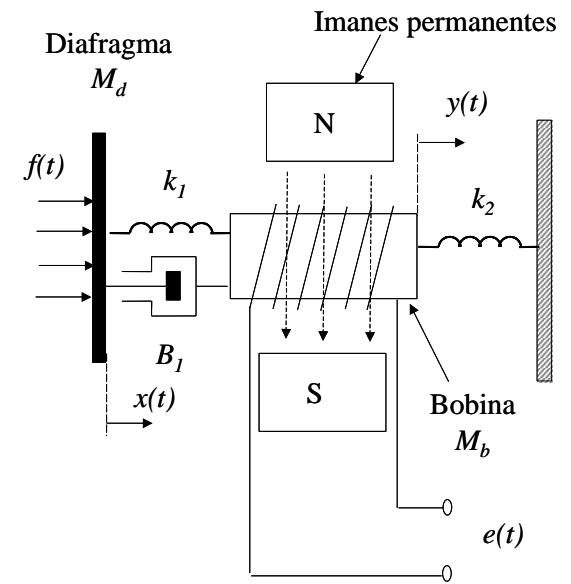
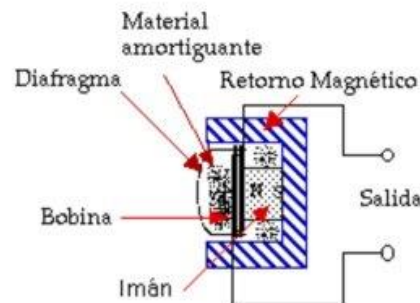
# Problema 3: Dinámica de un micrófono

El funcionamiento de un micrófono dinámico se basa en el desplazamiento espacial producido por una bobina dentro de un campo magnético. Hay un diafragma que se desplaza con la fuerza mecánica provocada por las ondas sonoras. Este desplazamiento se transmite a la ferrita de la bobina. La fuerza electromotriz generada en la bobina es proporcional a la inducción de campo,  $B$ , al número de espiras,  $n$ , a la longitud de espiras,  $l$ , y al desplazamiento relativo de la bobina:

$$e(t) = 2 \cdot B \cdot n \cdot l \cdot \frac{d(y(t))}{dt}$$

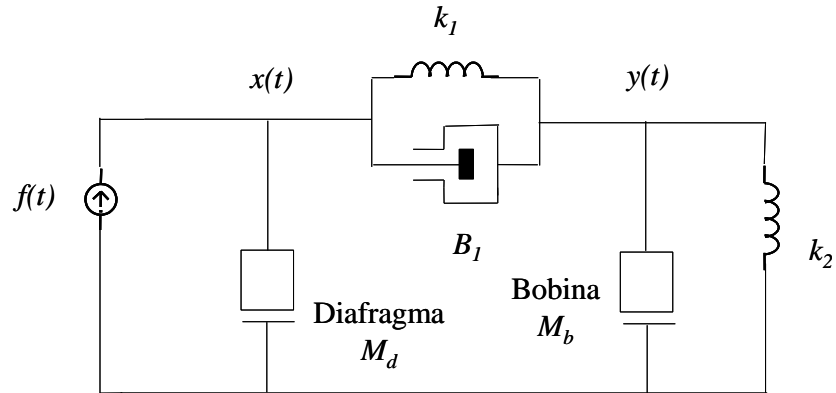
Se considera el modelo simplificado unidimensional de fuerzas adjuntado, donde  $M_d$  es la masa del diafragma y  $M_b$  la masa de la bobina. En el desplazamiento horizontal del diafragma hacia la bobina, se conjetura un rozamiento viscoso,  $B_1$  y un amortiguamiento,  $k_1$ . La bobina está separada de la estructura a través de un amortiguador,  $k_2$ . Se pide:

1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que definan la dinámica del sistema.
2. Diagrama de bloques.
3. Función de transferencia entre la fuerza sonora y la tensión de salida.



# Problema 3: Dinámica de un micrófono

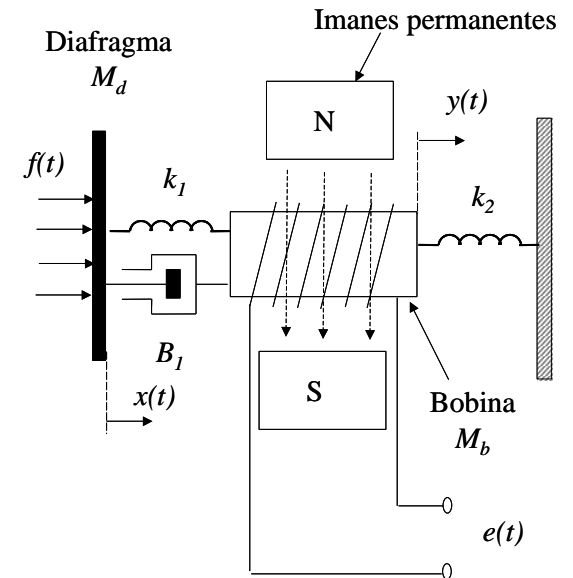
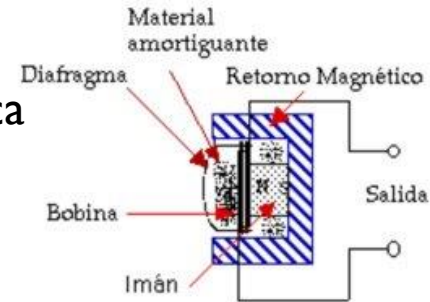
I. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que definan la dinámica del sistema.



$$f(t) = M_d \ddot{x}(t) + k_1(x(t) - y(t)) + B_1(\dot{x}(t) - \dot{y}(t))$$

$$k_1(x(t) - y(t)) + B_1(\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) = M_b \ddot{y}(t) + k_2 y(t)$$

$$e(t) = 2Bnl \dot{y}(t) = k^* \dot{y}(t)$$



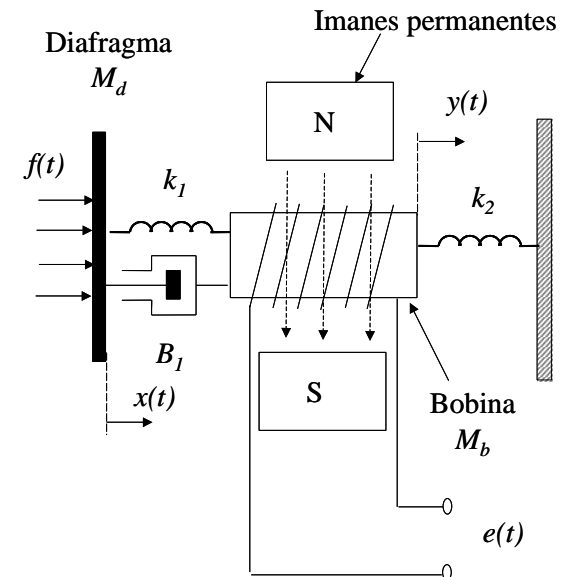
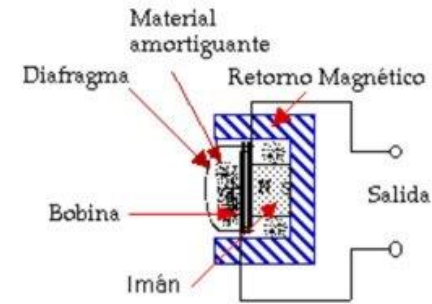
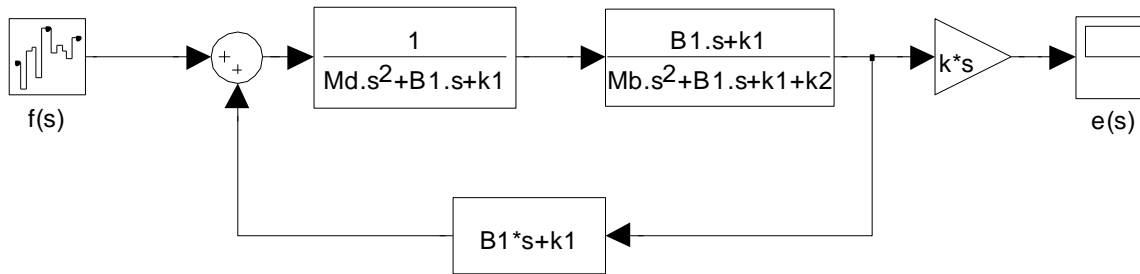
# Problema 3: Dinámica de un micrófono

## 2. Diagrama de bloques.

$$f(t) = M_d \ddot{x}(t) + k_1(x(t) - y(t)) + B_1(\dot{x}(t) - \dot{y}(t))$$

$$k_1(x(t) - y(t)) + B_1(\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) = M_b \ddot{y}(t) + k_2 y(t)$$

$$e(t) = 2Bnl \dot{y}(t) = k^* \dot{y}(t)$$



## 3. Función de transferencia entre la fuerza sonora y la tensión de salida.

$$\frac{e(s)}{f(s)} = \frac{k^* s (B_1 s + k_1)}{M_d M_b s^4 + B_1 (M_d + M_b) s^3 + [k_1 (M_d + M_b) + k_2 M_d] s^2 + B_1 k_2 s + k_1 k_2}$$

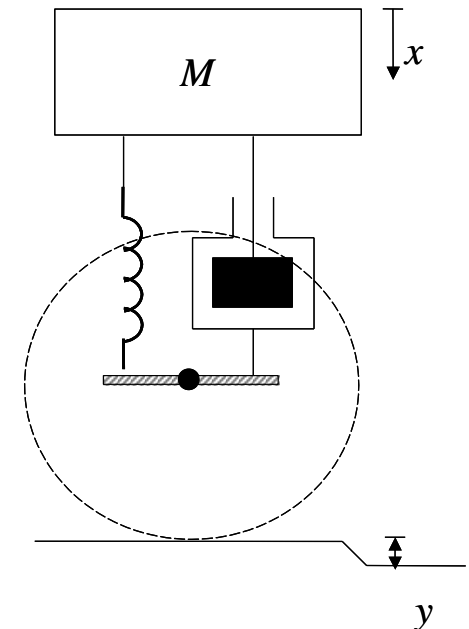
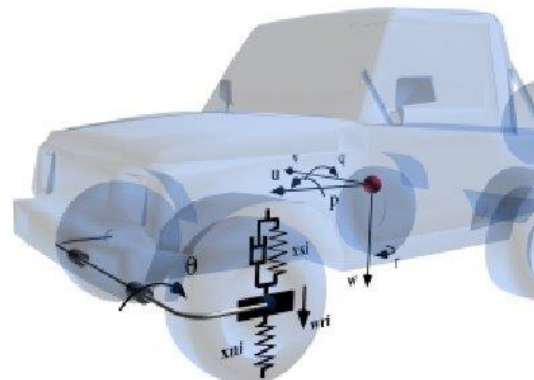
# Problema 5: Sistema de suspensión

En la figura derecha se muestra un modelo de suspensión de vehículos de tracción. Haciendo suposiciones de simplificación y de reparto del peso del coche sobre las cuatro ruedas, se ha obtenido un segundo modelo. Se pide:

1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que describe la dinámica del modelo simplificado.
2. Función de transferencia entre el desnivel del pavimento (causa),  $Y(s)$ , con el desplazamiento del chasis (efecto),  $X(s)$ .

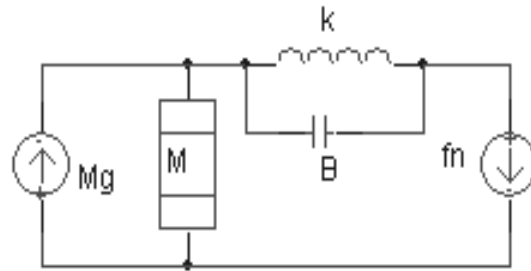
## Datos

El peso del vehículo es de una tonelada y las características del amortiguador están dadas por  $B = 500 \text{ Ns/m}$  y  $K = 1000 \text{ N/m}$ .



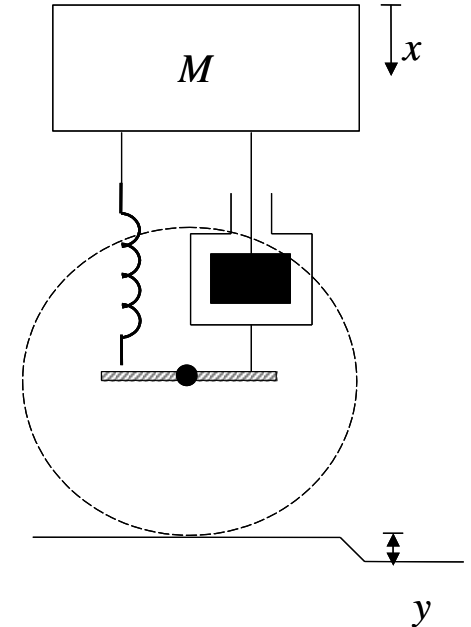
# Problema 5: Sistema de suspensión

- Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que describe la dinámica del modelo simplificado.



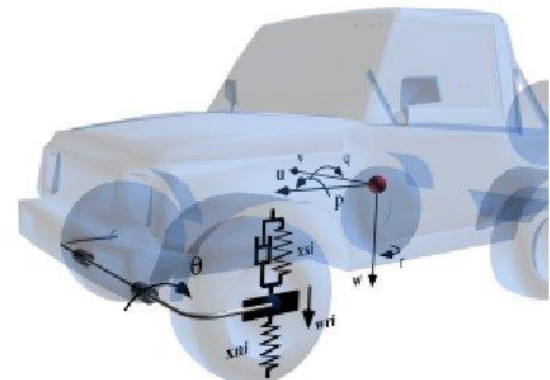
$$Mg = M\ddot{x}(t) + K(x(t) - y(t)) + B(\dot{x}(t) - \dot{y}(t))$$

$$f_n(t) = K(x(t) - y(t)) + B(\dot{x}(t) - \dot{y}(t))$$



- Función de transferencia entre el desnivel del pavimento (causa),  $Y(s)$ , con el desplazamiento del chasis (efecto),  $X(s)$ .

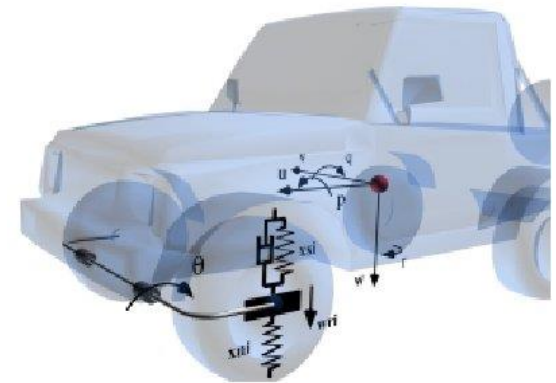
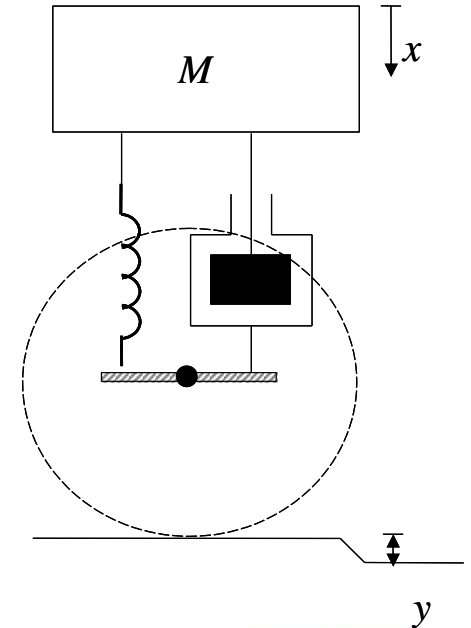
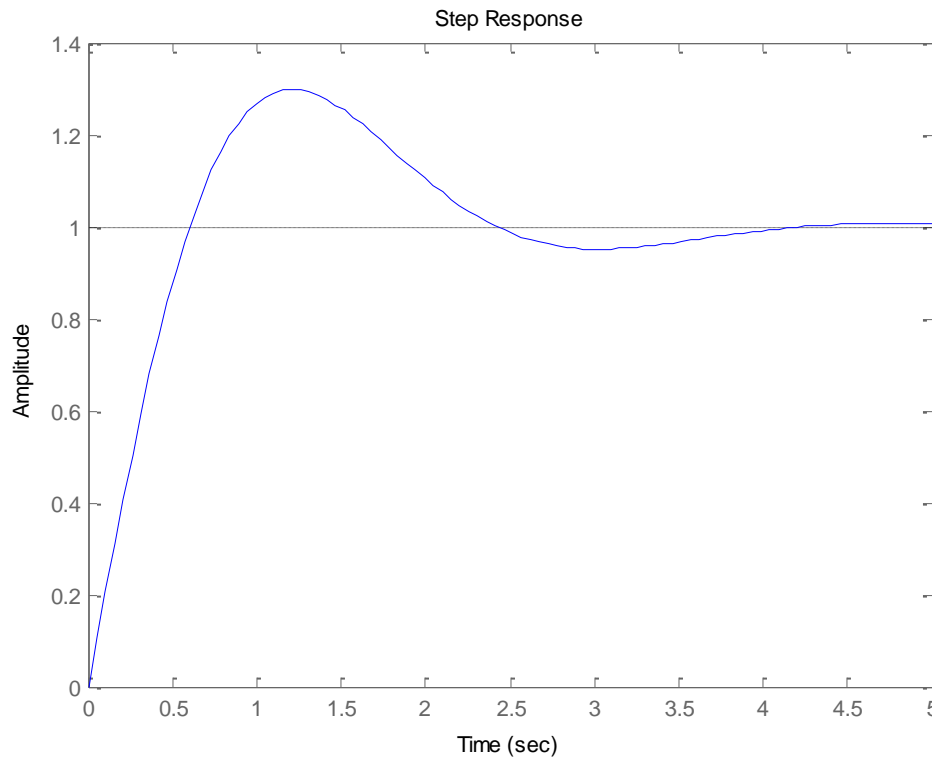
$$\frac{\Delta x(s)}{\Delta y(s)} = \frac{K + Bs}{Ms^2 + Bs + K} = \frac{1 + 0.5s}{1 + 0.5s + 0.25s^2}$$





# Problema 5: Sistema de suspensión

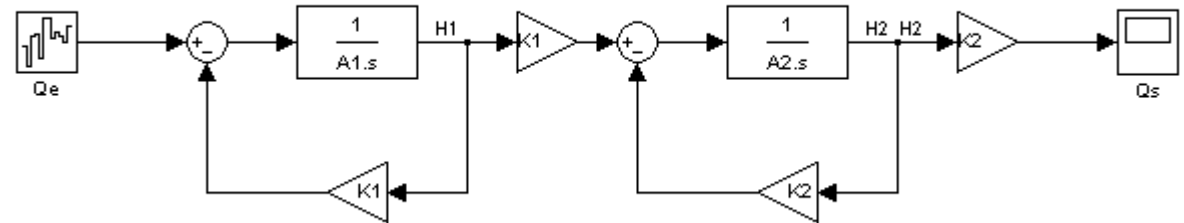
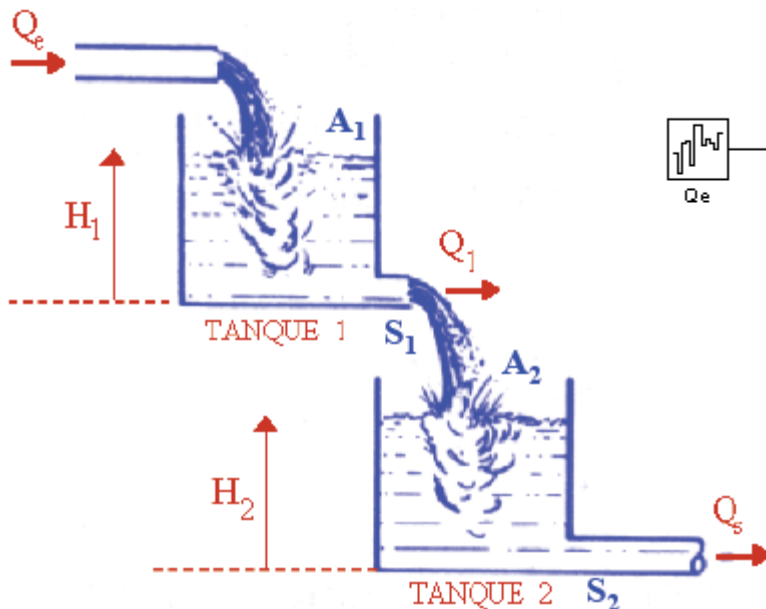
$$\frac{\Delta x(s)}{\Delta y(s)} = \frac{K + Bs}{Ms^2 + Bs + K} = \frac{1 + 0.5s}{1 + 0.5s + 0.25s^2}$$



# Control de depósitos (I)

Para la dinámica de los tanques de agua se considera los caudales ( $Q_i$ ), la sección de los depósitos ( $A_i$ ) y de las tuberías de escape ( $S_i$ ), junto los niveles de altura ( $H_i$ ):

1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que defina la dinámica del sistema.
2. Linealización del modelo alrededor de un punto de reposo.
3. Determinar la relación que se establece entre las alturas de los depósitos ( $H_i$ ) y la secciones de las tuberías de escape ( $S_i$ )
4. Modelo incremental que relacione la variación del caudal de entrada con el caudal de salida.
5. Diagrama a bloques del modelo incremental.



Considerando  $K_i = cS_i \sqrt{\frac{g}{2H_i(0)}}$

# Control de depósitos (II) Primer parcial 15/16

El sistema de la figura muestra el esquema de un prototipo para intentar mantener estable el nivel de un depósito en torno a una referencia  $h_{ref}(t)$ . El depósito superior tiene un área superficial  $A_1$  y un nivel  $h_1(t)$  y el inferior un área  $A_2$  y un nivel  $h_2(t)$ .

El caudal saliente del depósito de arriba y entrante en el de abajo, queda regulado por una válvula de muelle. Esta válvula se compone de un cilindro sólido de masa  $M$ , que al desplazarse un valor  $x(t)$  descubre un orificio que dejará pasar más o menos líquido según la siguiente ecuación:

$$q_s(t) = K_1 \cdot x(t) \cdot \sqrt{h_1(t)}$$

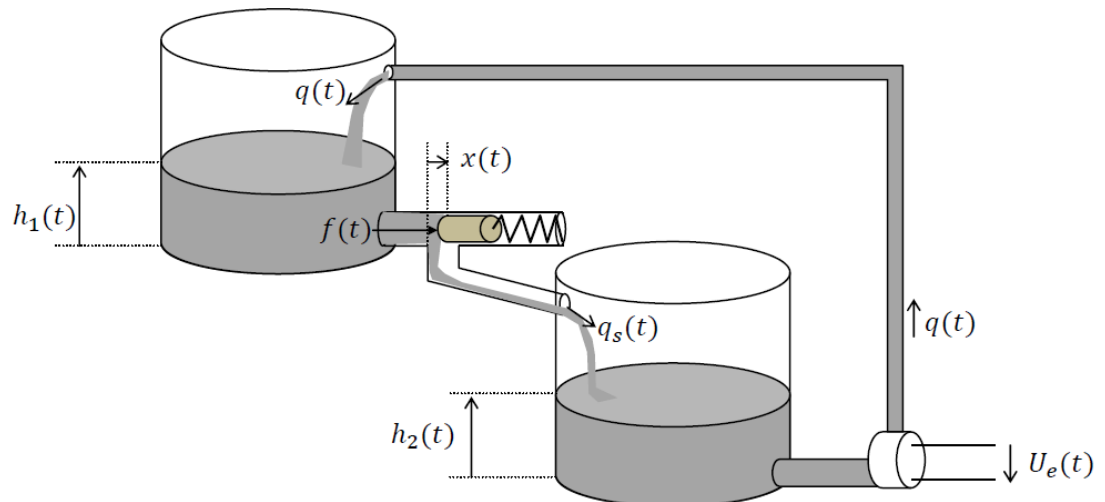
El cuerpo de la válvula estará sometido por un lado al empuje del líquido cuya fuerza resultante es:

$$f(t) = K_2 \cdot h_1(t)$$

y por otro a la fuerza del resorte de constante  $K$ , y un rozamiento lineal de constante  $B$ .

Desde el depósito de abajo se bombea agua al depósito de arriba gracias a una bomba que es controlada por medio de la tensión  $U_e(t)$ . Esta tensión se obtiene mediante un regulador proporcional, de forma que las ecuaciones que modelan el caudal mencionado son las siguientes:

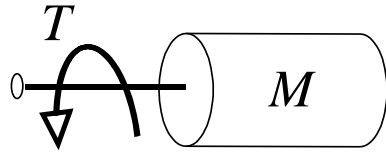
$$q(t) = K_3 + K_4 \cdot U_e(t)^2$$
$$U_e(t) = K_5 \cdot (h_{ref}(t) - h_2(t))$$



# Movimientos de rotación

---

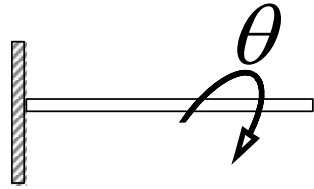
## ► Momento de inercia



$$T(t) = J\alpha(t) = J\dot{\omega}(t) = J\ddot{\mathcal{G}}(t) \quad J = \sum_i m_i r_i^2$$

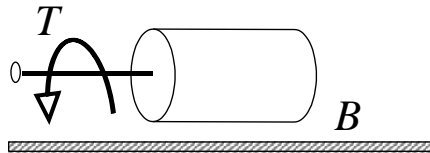
$$J = \frac{1}{2}Mr^2 \quad (\text{Momento de inercia cilindro})$$

## ► Resorte torsional



$$T(t) = k\mathcal{G}(t)$$

## ► Fricción viscosa (mov. rotacional)



$$T(t) = B\omega(t) = B\dot{\mathcal{G}}(t)$$

# Movimientos de rotación

---

## ► Sistemas de unidades

Mag.Física	SI
$T$	Nm
$J$	kg m <sup>2</sup>
$k$	Nm/rad
$B$	Nm s/rad

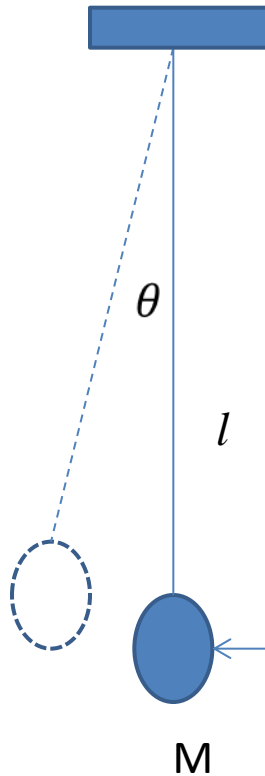
## ► Analogías

movimiento de rotación	sistema eléctrico
Par mecánico	corriente
Desplazamiento angular	potencial

# Ejemplo

---

Obtener el periodo de oscilación de un péndulo simple (puede apoyarse en la excitación de un pulso de fuerza dado a un péndulo en reposo).



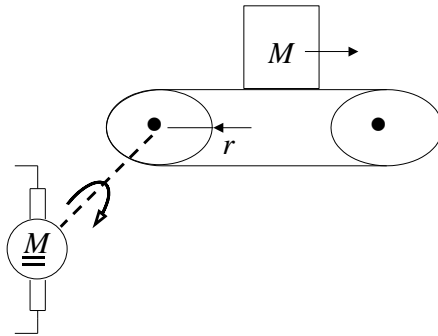
$$f(t) \cdot l - Mg \cdot \text{sen}\theta(t) \cdot l = M \cdot l^2 \ddot{\theta}(t)$$

$$\frac{\Delta\theta(s)}{\Delta f(s)} = \frac{1/M}{l \cdot s^2 + g}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

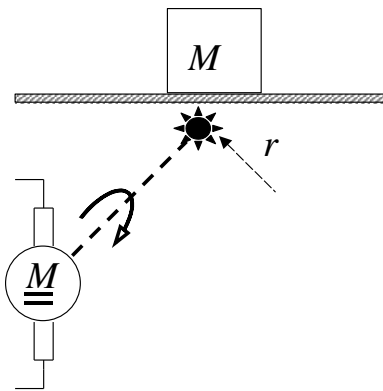
# Conversión entre movimientos de traslación y de rotación

## ► Cinta transportadora



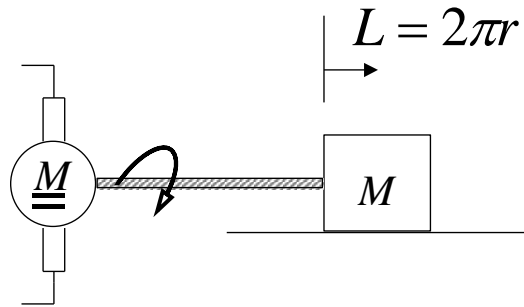
## ► Cremalleras

$$T(t) = (Mr^2) \cdot \ddot{\vartheta}(t)$$



# Conversión entre movimientos y trenes

## ▶ Husillos



$$T(t) = \left( M \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2 \right) \ddot{\theta}(t)$$



## ▶ Trenes de engranajes

- ▶ Adecuar el par y la velocidad angular a la carga





# Trenes de engranajes

El número de dientes sobre la superficie de los engranajes,  $N_1$  y  $N_2$ , es proporcional a los radios  $r_1$  y  $r_2$ :

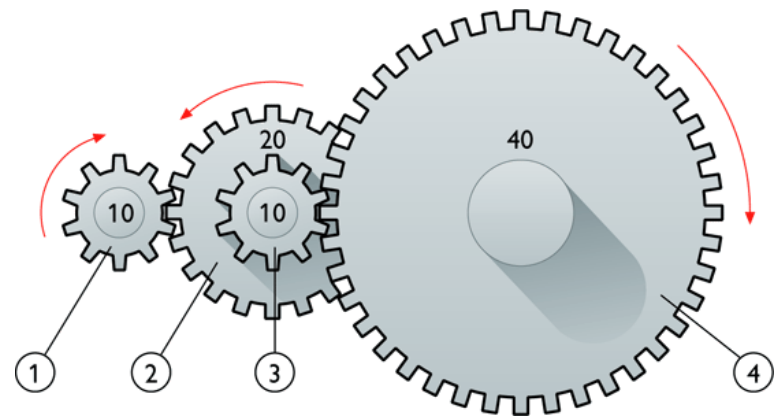
$$\frac{r_1}{N_1} = \frac{r_2}{N_2}$$

La distancia recorrida por la periferia de cada engranaje es la misma. Igualando las circunferencias de ambas según el desplazamiento angular dado para un tiempo determinado:

$$\mathcal{G}_1(t)r_1 = \mathcal{G}_2(t)r_2$$

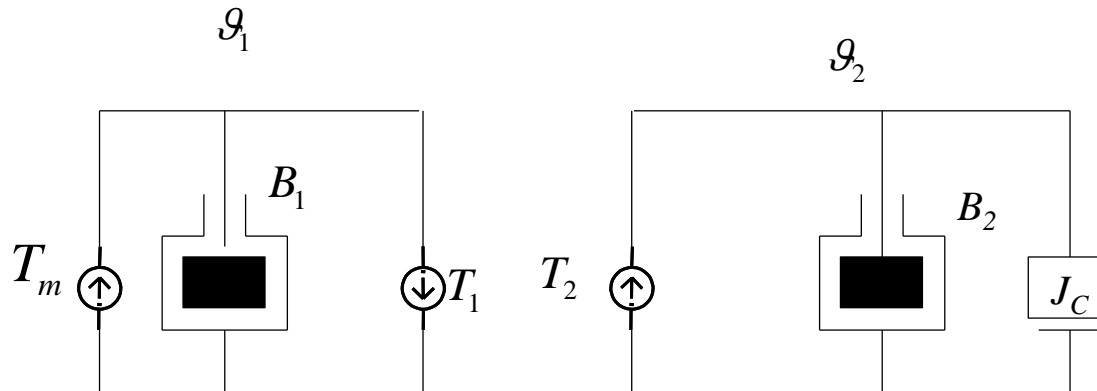
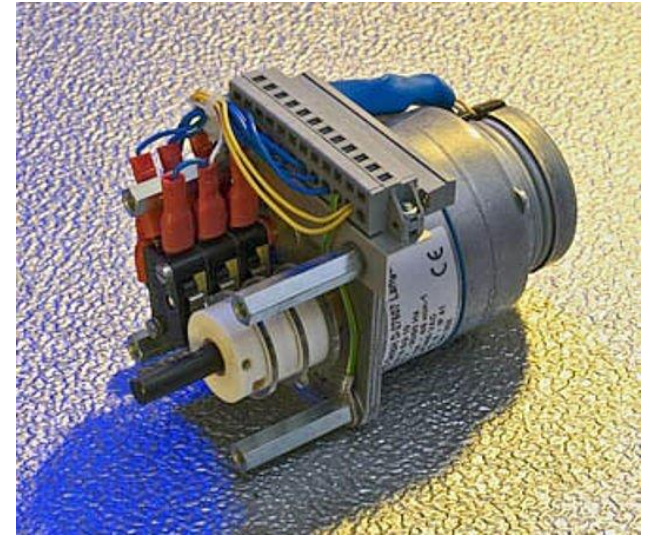
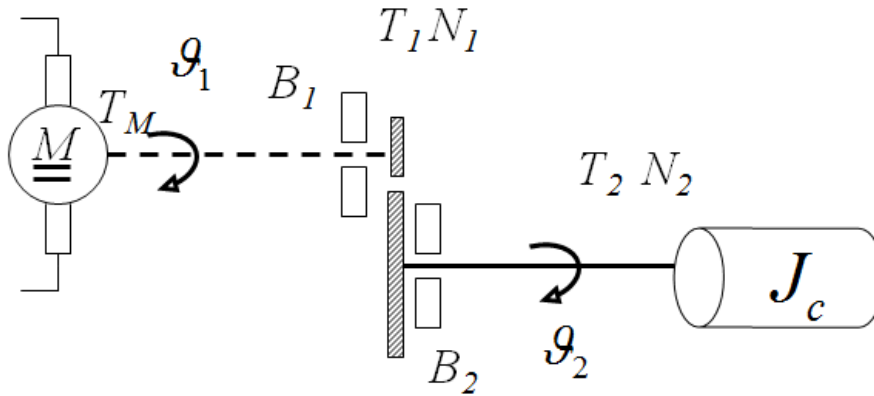
La potencia transmitida en la entrada en un engranaje es igual al que se da en la salida, ya que se supone que no hay pérdidas:

$$\mathcal{G}_1(t)T_1(t) = \mathcal{G}_2(t)T_2(t)$$



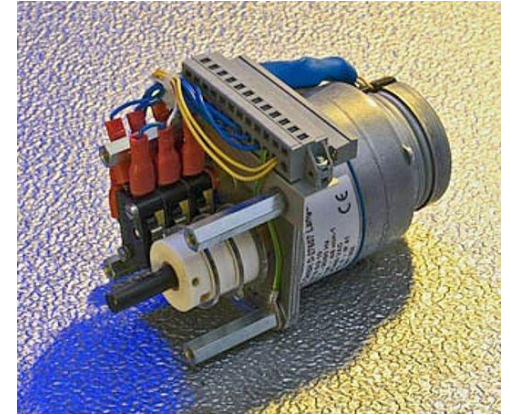
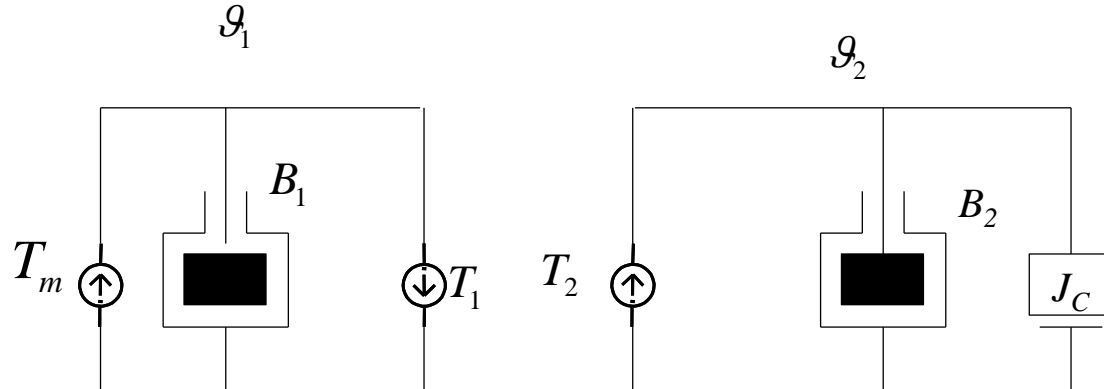
# Modelo del tren de engranajes

## ► Transformador mecánico



# Modelo del tren de engranajes

## ► Transformador mecánico



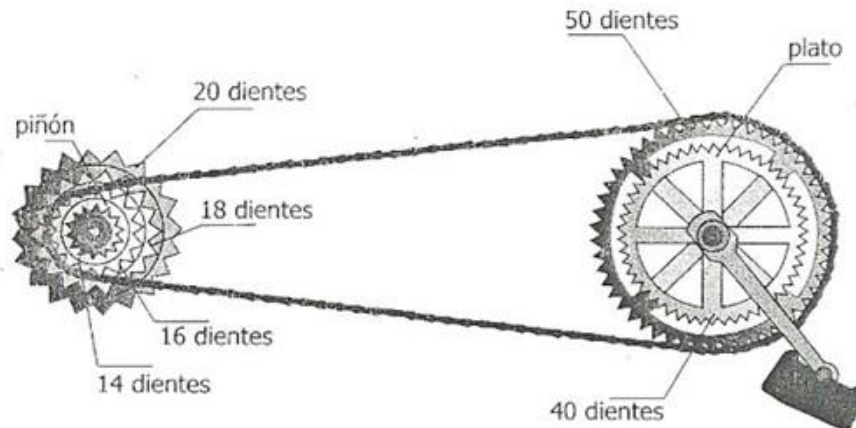
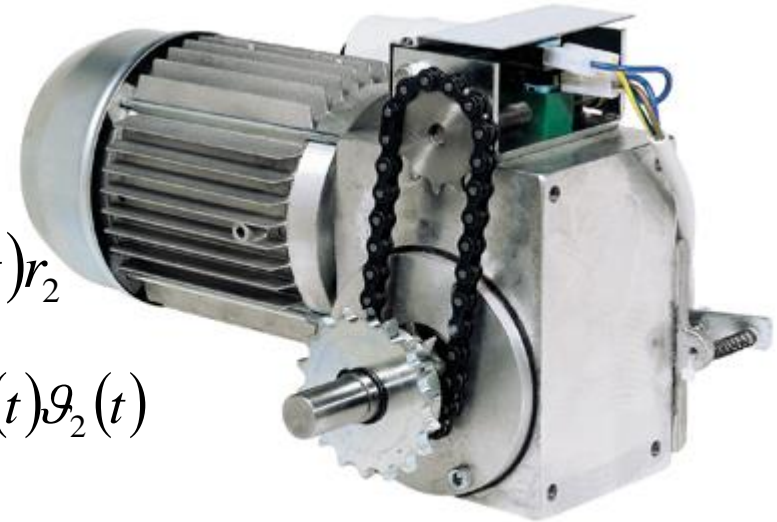
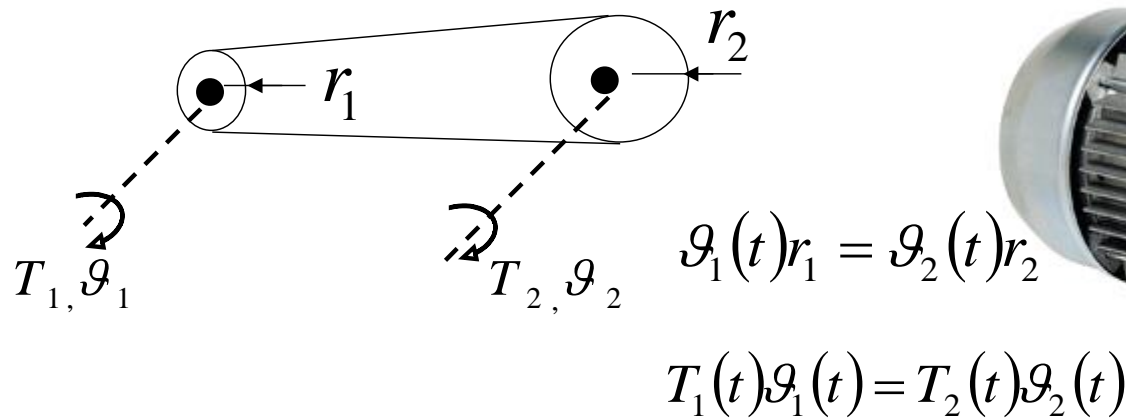
$$\frac{T_1(t)}{T_2(t)} = \frac{\mathcal{G}_2(t)}{\mathcal{G}_1(t)} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)}$$

$$\left. \begin{aligned} B_{eq} &= B_1 + B_2 \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \\ J_{eq} &= J_C \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_m(t) = B_{eq} \dot{\mathcal{G}}_1(t) + J_{eq} \ddot{\mathcal{G}}_1(t)$$

# Cadenas mecánicas

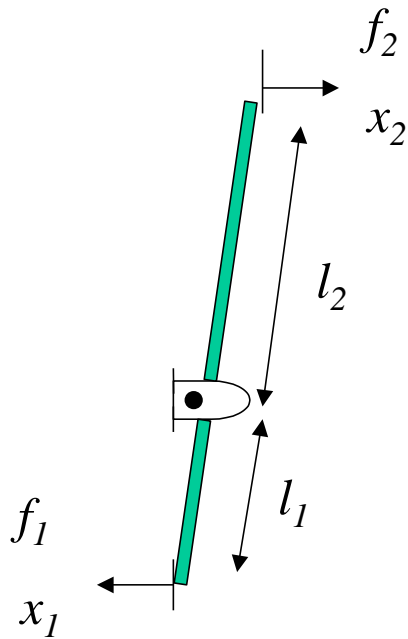
Las cadenas permiten transmitir la energía mecánica a mayor distancia que los trenes de engranajes.

Sin embargo, son menos precisas en su transmisión y tienen mayores pérdidas.



# Palancas

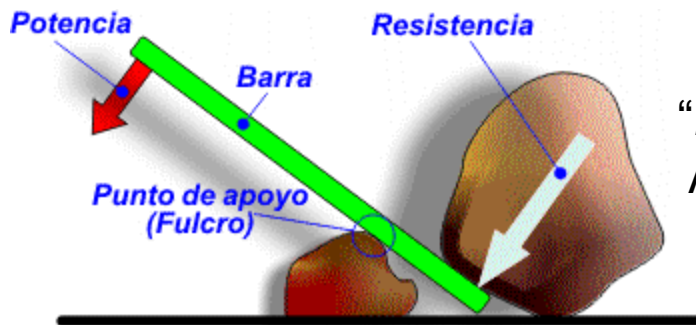
Los sistemas de palanca transmiten movimientos de traslación aproximadamente.



$$f_1(t)l_1 = f_2(t)l_2$$

$$f_1(t)x_1(t) \cong f_2(t)x_2(t)$$

$$\frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \frac{l_2}{l_1}$$

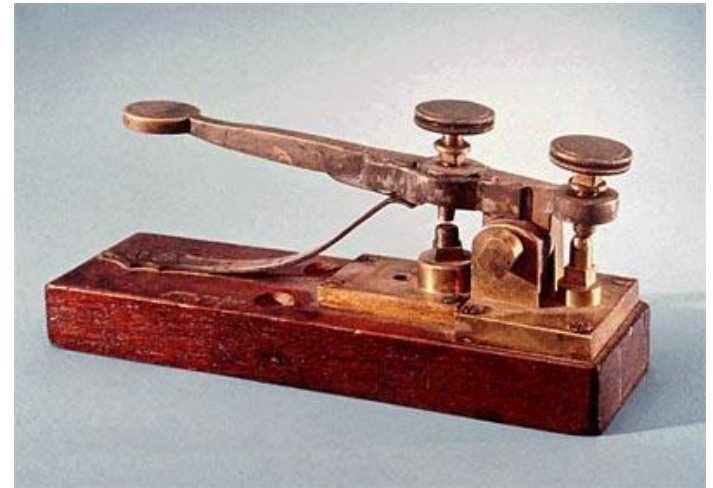
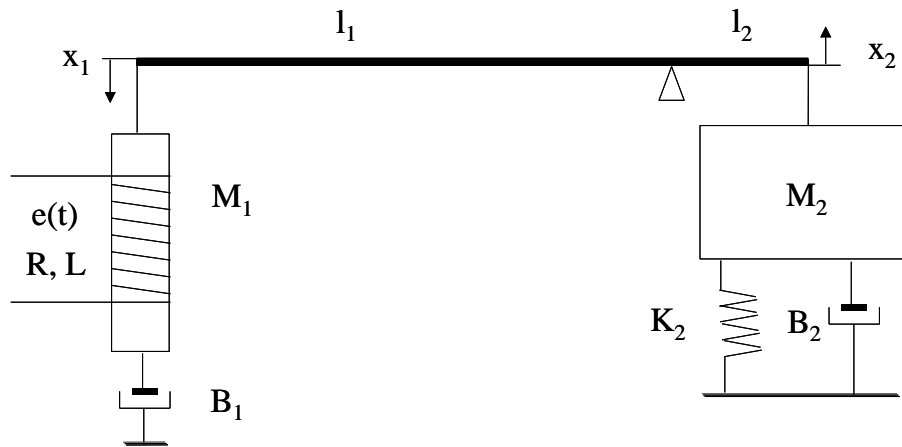


*"Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo"*  
Arquímedes (287 a. C. – c. 212 a. C)

# Problema 4: Dinámica de un telégrafo

La figura muestra el modelo simplificado de un telégrafo. Ante la recepción de un pulso eléctrico se produce una fuerza magnética proporcional a la corriente de su bobina, originando un desplazamiento en la palanca que provoca el movimiento de la masa del martillo, el cual choca contra una campana, produciendo una onda sonora. Se pide:

1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que modele la dinámica del telégrafo.
2. Diagrama a bloques y función de transferencia entre el efecto,  $x_2(s)$ , y la causa,  $e(s)$ .





# Problema 4: Dinámica de un telégrafo

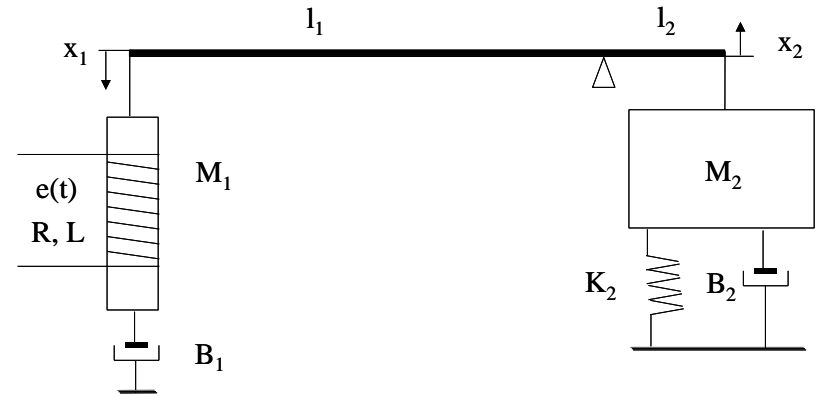
- Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que modele la dinámica del telégrafo.

$$e(t) = Ri(t) + Li\dot{(t)}; \quad f(t) = k_p i(t)$$

$$f(t) + M_1 g = M_1 \ddot{x}_1(t) + B_1 \dot{x}_1(t) + f_{r1}(t);$$

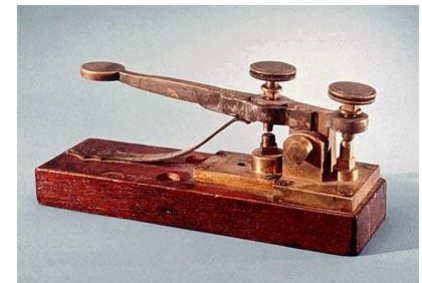
$$f_{r2}(t) = M_2 g + M_2 \ddot{x}_2(t) + B_2 \dot{x}_2(t) + k_2 x_2(t)$$

$$f_{r1}(t)l_1 = f_{r2}(t)l_2; \quad \frac{x_1(t)}{l_1} \cong \frac{x_2(t)}{l_2}$$



- Diagrama a bloques y función de transferencia entre el efecto,  $x_2(s)$ , y la causa,  $e(s)$ .

$$\frac{\Delta x_2(s)}{\Delta e(s)} = \frac{k_p}{(R + sL) \left( \left( M_1 \frac{l_1}{l_2} + M_2 \frac{l_2}{l_1} \right) s^2 + \left( B_1 \frac{l_1}{l_2} + B_2 \frac{l_2}{l_1} \right) s + k_2 \frac{l_2}{l_1} \right)}$$



# Problema 6: Control sobre un péndulo

La siguiente figura representa un péndulo controlado por medio de un electroimán. Un complejo sistema electromecánico permite ejercer una fuerza horizontal sobre la barra del péndulo en el punto P proporcional a la intensidad que recorre la bobina:

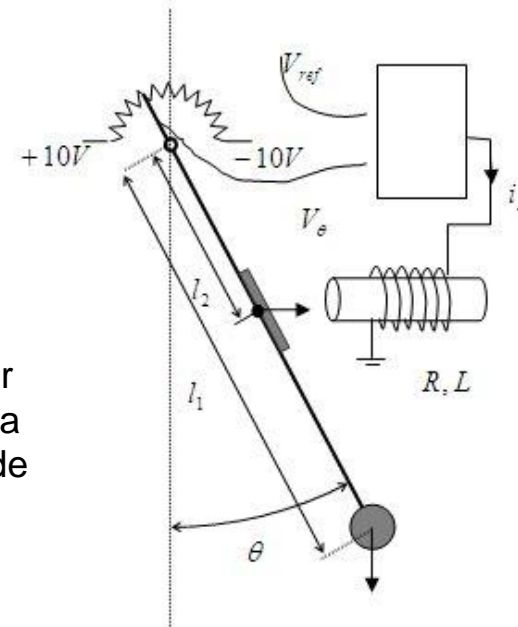
$$F(t) = 2 \left[ \frac{N}{A} \right] \cdot i_L(t)$$

El ángulo girado por el péndulo respecto de la vertical es medido por medio del potenciómetro lineal mostrado en la figura, de tal forma que cuando el ángulo es de  $90^\circ$  la medida es de 10 V y cuando es de  $-90^\circ$  la medida es de -10 v. El montaje del potenciómetro introduce un rozamiento de constante  $B = 3 \left[ \frac{N \cdot m \cdot s}{radian} \right]$ . El sistema electrónico contiene el amplificador de error y un driver de potencia, de forma que la tensión de salida es amplificada  $k$  veces de la tensión de error. Teniendo en cuenta los datos suministrados en la figura, se pide:

1. Ecuaciones físicas del sistema.
2. Linealizar el sistema respecto del punto  $\theta_0 = 30^\circ$ . Justificar que:

$$\frac{\Delta\theta(s)}{\Delta F(s)} = \frac{0.173}{s^2 + 3s + 11.547}$$

3. Considérese para este apartado y el siguiente que el valor de  $K$  es 10. Diagrama a bloques y función de transferencia
4. ¿Cómo evoluciona el ángulo si se introduce una tensión de referencia de +4 Voltios como valor absoluto?



**Datos:**

$l_1 = 1m.$   
 $l_2 = 0,2m.$   
 $L = 1H$   
 $R = 0,1\Omega$   
 $M = 1Kg.$



# Problema 6: Control sobre un péndulo

## 1. Ecuaciones físicas del sistema

Control:  $V_e(t) = K(V_{ref}(-V_\theta))$       Potenciómetro:  $V_\theta(t) = \frac{20}{\pi}\theta(t)$

Electroimán:  $V_e(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t)$       Péndulo:  $F(t)l_2 \cos \theta = Ml_1^2 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + Mgl_1 \sin \theta + B \frac{d\theta(t)}{dt}$   
 $F(t) = 2i_L(t)$

## 2. Linealizar el sistema respecto del punto $\theta_0 = 30^\circ$

$$V_{\theta_0} = 3,33V. \quad \Delta V_\theta = 6,33\Delta\theta$$

$$F_0 = 28,87N \quad \Delta V_e = 10(\Delta V_{ref} - \Delta V_\theta)$$

$$i_{L_0} = 14,43A \quad \Delta i_L = \frac{1}{s+0,1} \Delta V_e$$

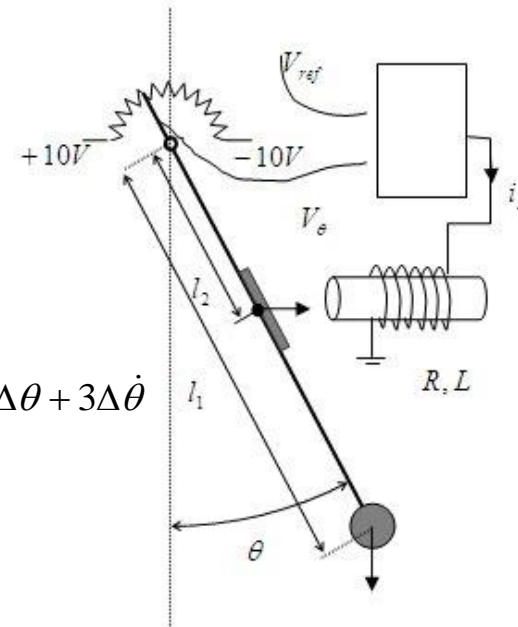
$$V_{e0} = 1,44v$$

$$\Delta F = 2\Delta i_L$$

$$V_{ref0} = 3,47V.$$

$$\Delta F \cdot l_2 \cos 30 - F_0 \sin 30 \cdot l_2 \Delta\theta = \Delta\ddot{\theta} + 10 \cos 30 \Delta\theta + 3\Delta\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \frac{0,173}{s^2 + 3s + 11,547} \Delta F$$



### Datos:

$$l_1 = 1m.$$

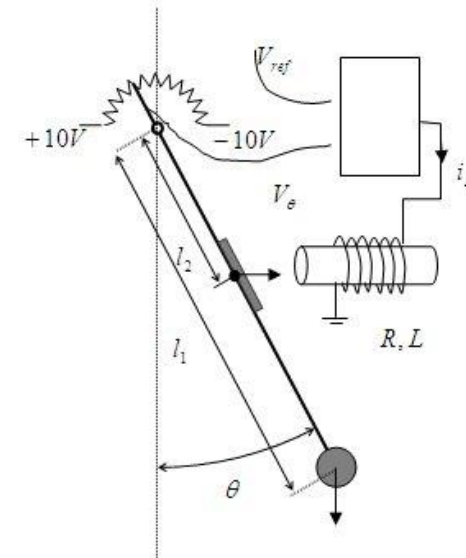
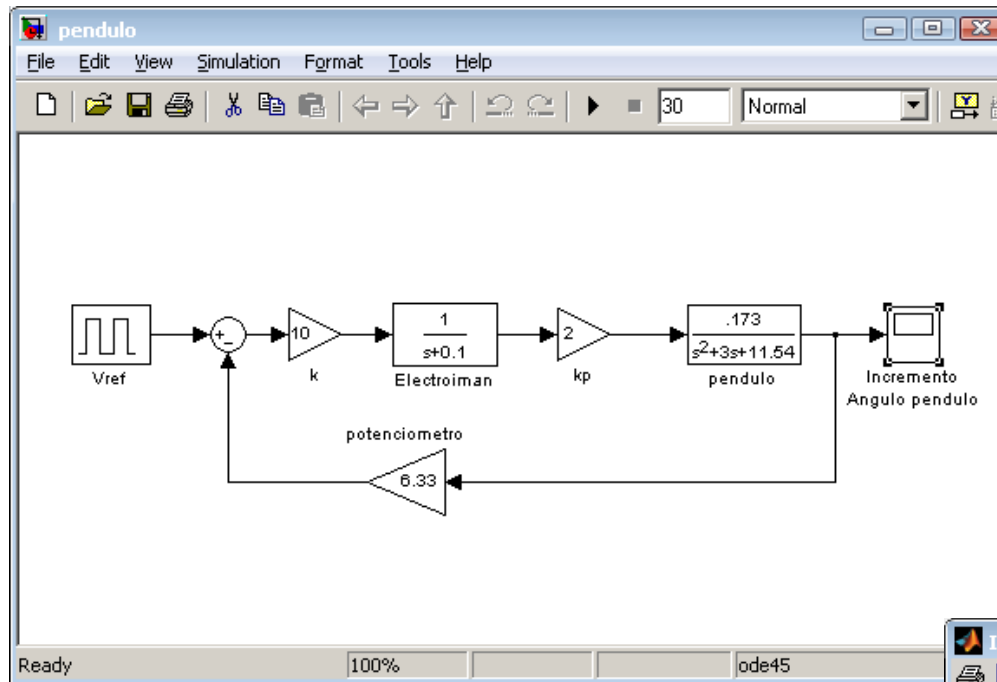
$$l_2 = 0,2m.$$

$$L = 1H$$

$$R = 0,1\Omega$$

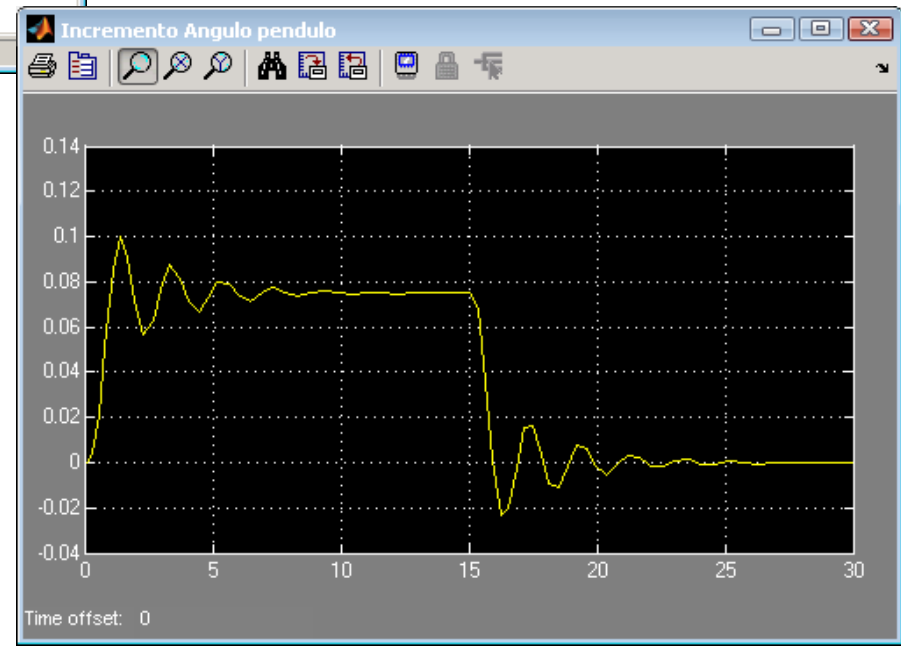
$$M = 1Kg.$$

# Problema 6: Control sobre un péndulo



Datos:

- $l_1 = 1m.$
- $l_2 = 0,2m.$
- $L = 1H$
- $R = 0,1\Omega$
- $M = 1Kg.$



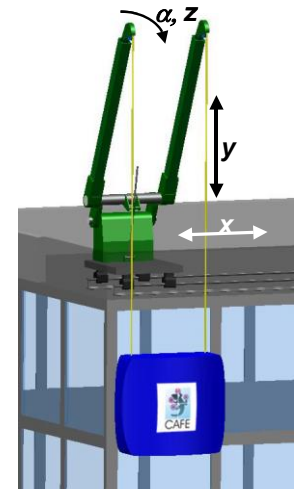
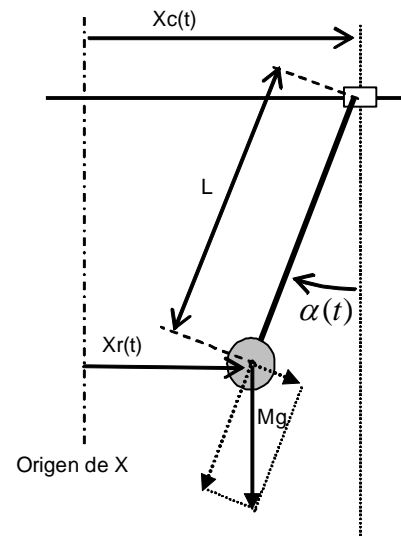
# Problema 10: Robot limpiador

El robot limpiador de fachadas mostrado en la figura, se compone de dos grandes elementos: por un lado un *carrier* comercial en lo alto de la fachada, y por otro el sistema de limpieza robótico, propiamente dicho, que sustituye a la canasta en la que habitualmente se sitúan los limpiadores. Se desea disminuir las oscilaciones que en el robot provocan los desplazamientos a lo largo del eje  $X$  del *carrier*. Para ello se ha supuesto el conocimiento de la longitud del cable  $L$  y de la masa del robot  $M$ , ambos datos fácilmente obtenibles por medio de sensores. Analizando la dinámica del sistema y siguiendo el sistema de referencias mostrado en el esquema de la figura, se ha llegado a la siguiente relación:

$$Mg \sin \alpha(t) = M \frac{d^2}{dt^2} X_R(t) + B \frac{d}{dt} X_R(t)$$

Demostrar que la función de transferencia que relaciona el movimiento en abscisas del robot con el movimiento en abscisas del *carrier* es:

$$G(s) = \frac{\Delta X_R(s)}{\Delta X_C(s)} = \frac{3.01}{s^2 + 0.0875s + 3.01}$$

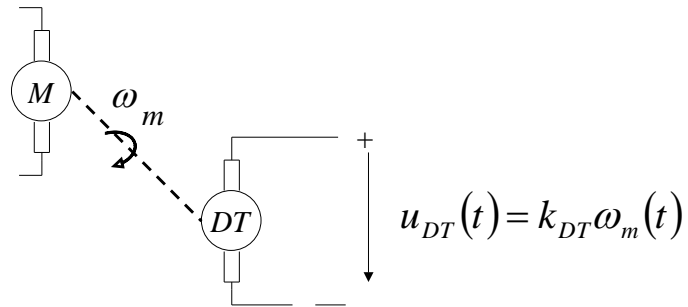


Datos:

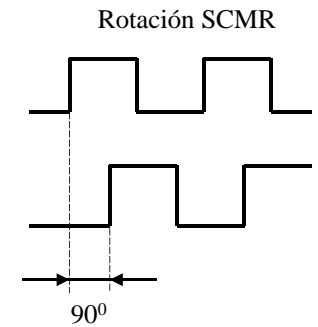
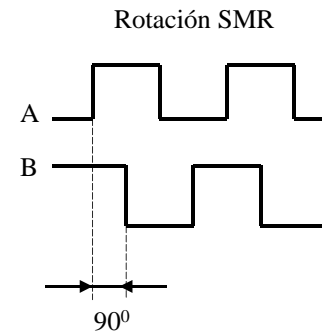
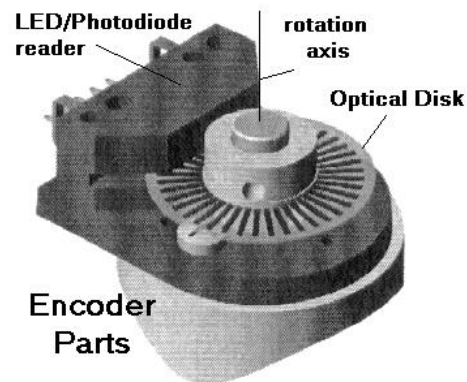
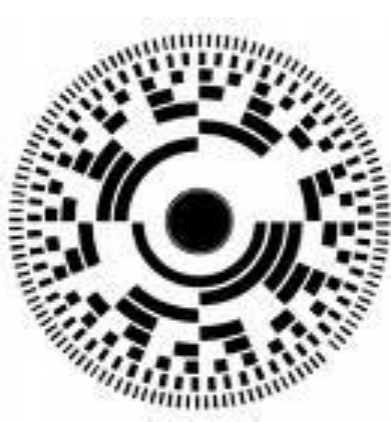
$$g = 9.8 \frac{m}{s^2} \quad L = 3.25m \quad M = 400Kg \quad B = 35 \frac{Ns}{m}$$

# Sistemas electromecánicos

## ▶ Dínamo tacométricas



## ▶ Encoders



# Fundamento del motor de continua

- ▶ Fuerza en una espira (Ley de Lorentz)

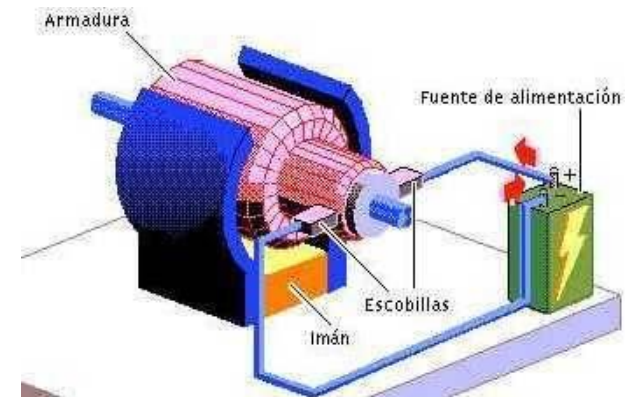
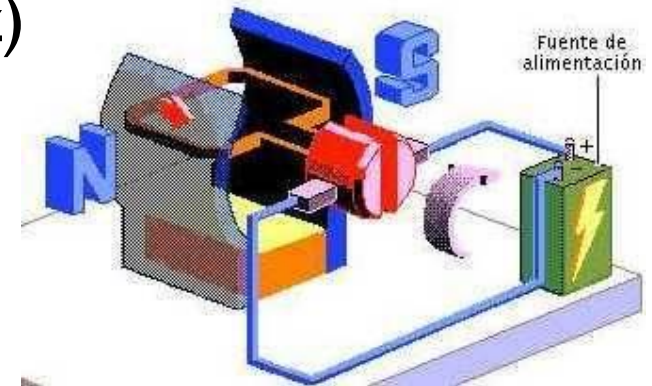
$$F_i = i_a \times B$$

- ▶ Par del conjunto de espiras

$$T_m = \sum F_i r = k_1 \Phi \cdot i_a$$

- ▶ Fuerza contraelectromotriz (Ley de Lenz)

$$e_b = N \frac{d\Phi}{dt} = k_2 \Phi \cdot \omega_m$$



# Modelo de motor de continua de imán permanente

- ▶ Pérdidas y conversión de energía eléctrica en energía mecánica

$$u_e(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_b(t)$$

- ▶ Par mecánico proporcional a la corriente de armadura

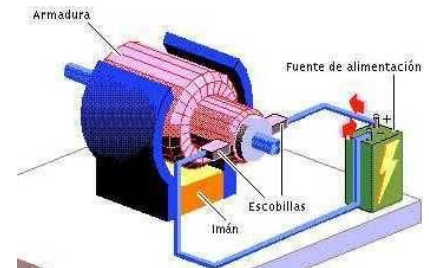
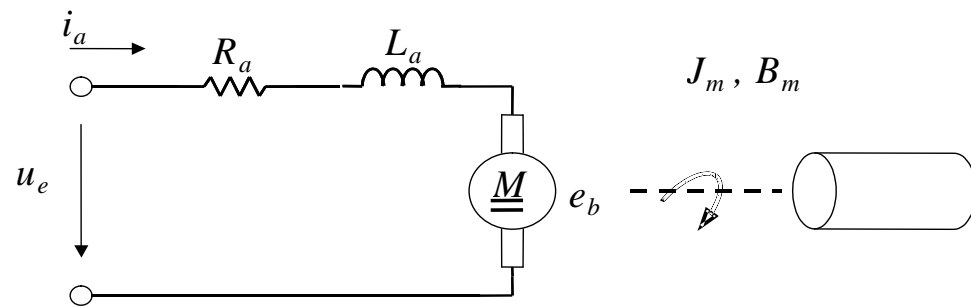
$$T_m(t) = k_p i_a(t)$$

- ▶ Movimiento de rotación

$$T_m = J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt}$$

- ▶ Realimentación del motor

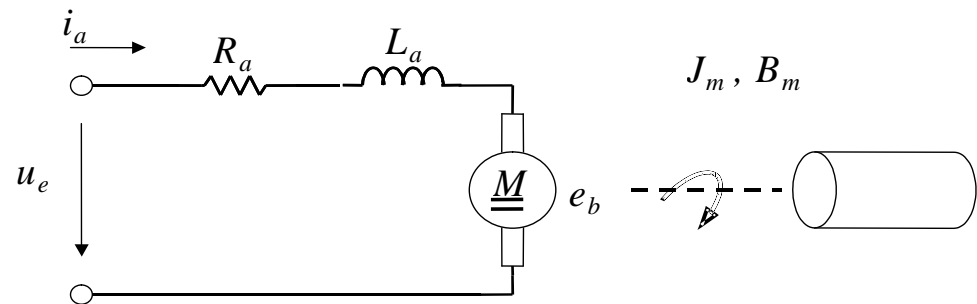
$$e_b(t) = k_b \omega_m(t)$$



# Modelo de motor de continua de imán permanente

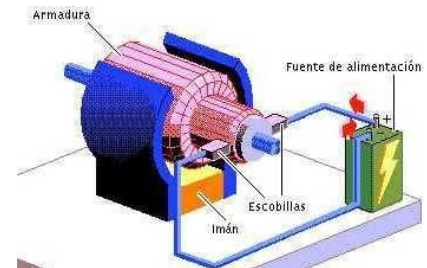
## ► Relación entre $k_p$ y $k_b$

$$P_m = i_a \cdot e_b = T_m \cdot \omega_m$$



$$i_a \cdot e_b = k_p \cdot i_a \cdot \omega_m \quad \rightarrow \quad i_a \cdot k_b \cdot \omega_m = k_p \cdot i_a \cdot \omega_m$$

$$k_p = k_b \quad [N.m / A] \equiv [V.s / rad]$$



# Problema 9: Modelado de una cinta transportadora

Para la traslación horizontal de una cámara de vídeo pan-tilt se ha utilizado una cinta transportadora. En el control se ha utilizado un motor de continua y una reductora. Se pide:

1. Diagrama de bloques del sistema
2. FDT entre el desplazamiento de la cámara y la tensión en el motor.

## Datos:

Motor: Resistencia de armadura =  $7.94 \Omega$ , Inductancia equivalente del flujo disperso =  $1.54 \text{ mH}$ ,  
Constante del par motor =  $39.3 \text{ mNm/A.}$ , Constante de la fuerza contraelectromotriz  $\Rightarrow 243 \text{ rpm/V}$ , Momento de inercia del rotor =  $26.6 \text{ gr cm}^2$

Tren de engranajes: relación de transmisión =  $1:198$

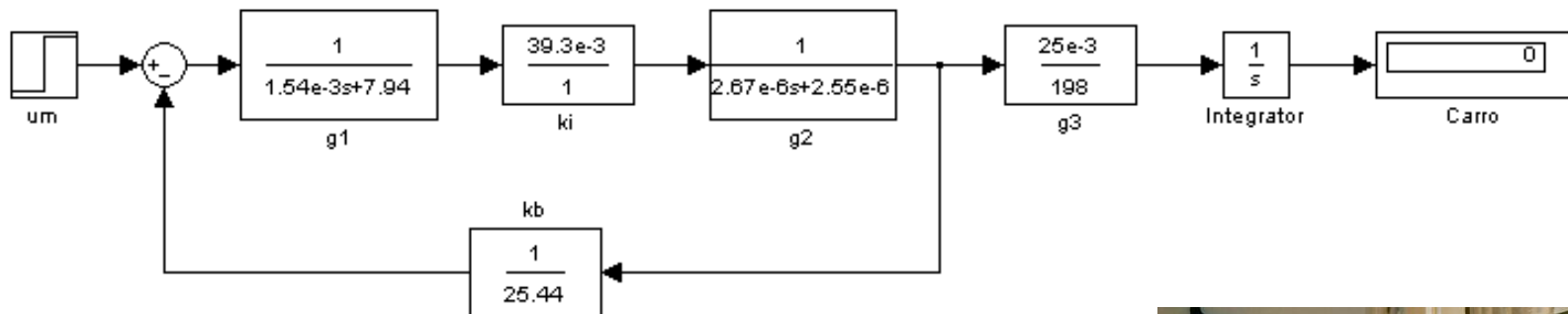
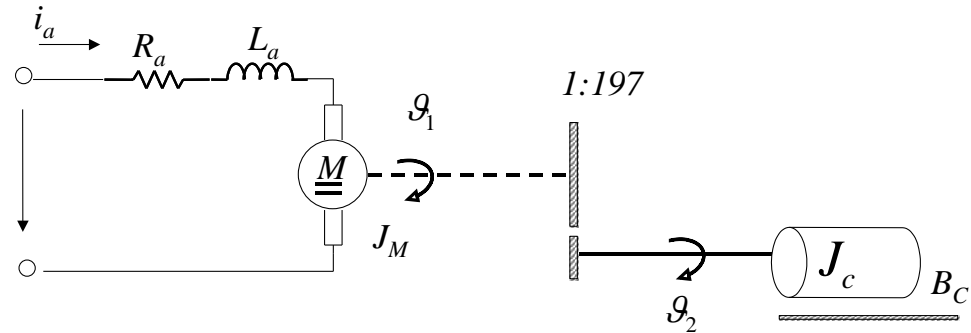
Cinta transportadora: Radio de las poleas =  $25 \text{ mm}$ ,  
Peso de la cámara =  $1200 \text{ gr}$ . Rozamiento viscoso equivalente de las poleas =  $10^{-1} \text{ N.m.s/rad}$





# Problema 9: Modelado de una cinta transportadora

## ► Diagrama a bloques



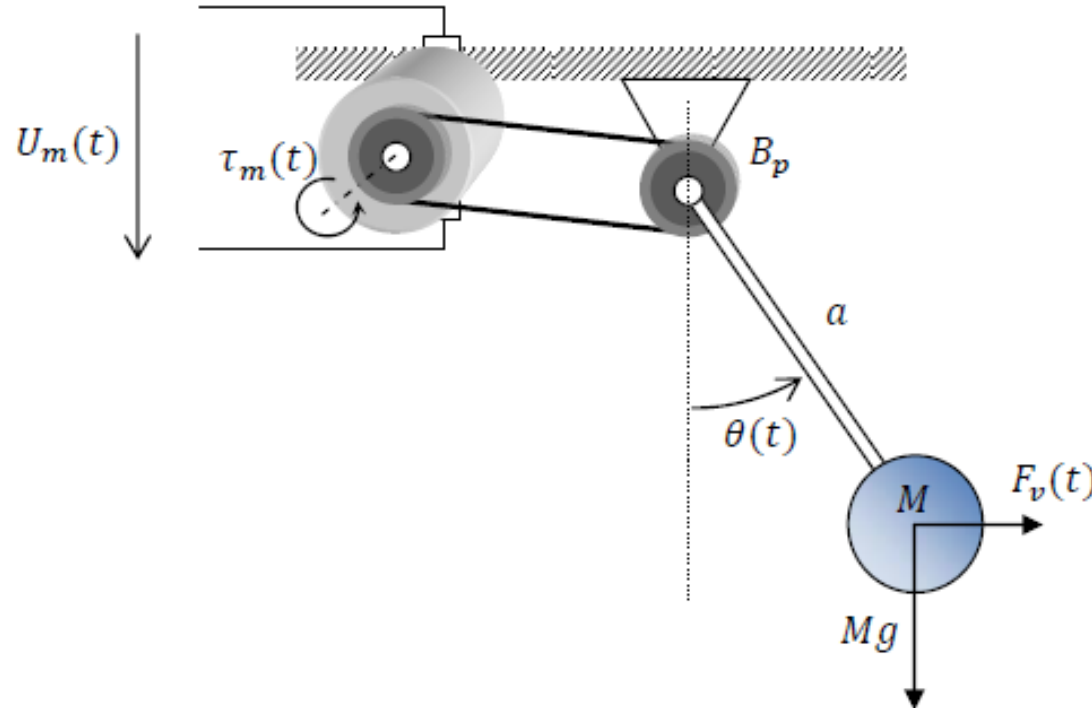
$$\frac{\dot{x}(s)}{u_m(s)} = \frac{4.96 \cdot 10^{-6}}{4.96 \cdot 10^{-9} \cdot s^2 + 2.11 \cdot 10^{-5} \cdot s + 1.56 \cdot 10^{-3}} = \frac{1211.33}{(s+5082)(s+75.17)}$$



# Examen del primer parcial (curso 14/15)

El sistema de la figura consta de un péndulo cuya varilla tiene masa despreciable y longitud  $a = 1\text{m}$ . En su extremo sujeta una bola de masa  $M = 100\text{ gr}$ , sometida a la acción de la gravedad ( $g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ) y a la fuerza del viento  $F_v(t)$  en dirección horizontal.

El péndulo tiene solidario una polea de radio  $R$ , que lo une a un motor que tiene otra polea de las mismas dimensiones, transmitiendo por medio de una correa el par motor generado. El rozamiento del eje de giro del péndulo queda determinado por  $B_p = 2\frac{\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}}{\text{rad}}$ .



Se considera que la inercia del núcleo del motor y la resistencia mecánica del mismo son despreciables, no así sus características eléctricas ( $K_i = 1\frac{\text{Nm}}{\text{A}}, K_v = 1\frac{\text{V}}{\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}, R = 100\Omega, L = 10\text{H}$ )

# Examen del primer parcial

1.- Ecuacion física del péndulo que relaciona  $\theta(t)$ ,  $\tau_m(t)$  y  $F_v(t)$

$$\tau_m(t) = a^2 M \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) + B \frac{d}{dt} \theta(t) + M \cdot g \cdot a \cdot \text{sen}(\theta(t)) - F_v(t) \cdot a \cdot \cos(\theta(t))$$

y ecuaciones del motor de CC:

$$U_m(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + V_{fem}(t)$$

$$V_{fem}(t) = K_v \dot{\theta}(t)$$

$$\tau_m(t) = K_i i(t)$$

2.- Linealizar las ecuaciones anteriores si el sistema se encuentra equilibrado en  $\theta_0 = 30^\circ$  y  $F_{v_0} = 0 \text{ N}$

Punto de equilibrio (derivadas nulas):

$$\tau_{m_0} = a^2 M \cdot 0 + B \cdot 0 + M \cdot g \cdot a \cdot \text{sen}(30) - 0 \cdot a \cdot \cos(\theta(t))$$

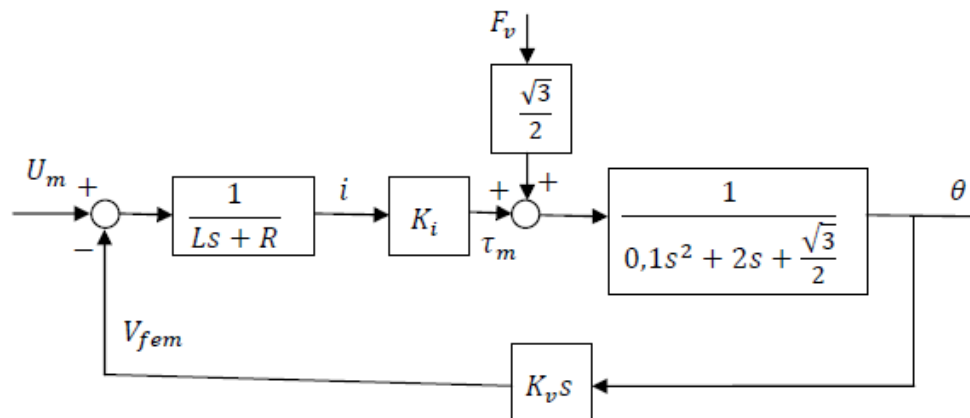
$$\tau_{m_0} = 0,5 \text{ Nm} \rightarrow i_0 = 0,5 \text{ A} \rightarrow U_{m_0} = 50 \text{ V}$$

Linealización:

$$\Delta \tau_m(t) = a^2 M \frac{d^2}{dt^2} \Delta \theta(t) + B \frac{d}{dt} \Delta \theta(t) + M \cdot g \cdot a \cdot \cos(\theta_0) \Delta \theta(t) - a \cdot \cos(\theta(t)) \Delta F_v(t) + a \cdot \text{sen}(\theta_0) F_{v_0} \Delta \theta(t)$$

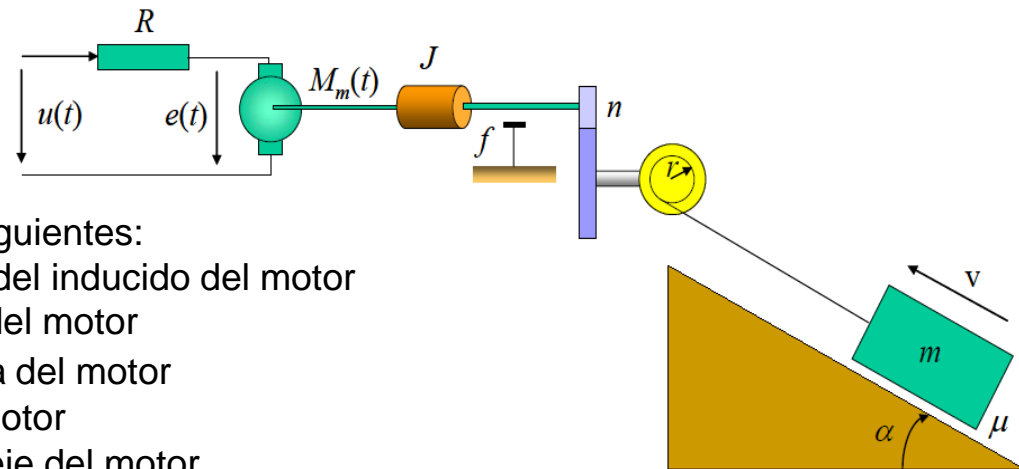
$$\Delta \tau_m(t) = 0,1 \frac{d^2}{dt^2} \Delta \theta(t) + 2 \frac{d}{dt} \Delta \theta(t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta \theta(t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta F_v(t)$$

Las ecuaciones del motor son lineales, por lo que lo único es poner variables incrementales



# Examen (julio 2017)

La figura representa el mecanismo de elevación de una masa  $m$  situada sobre una rampa. El sistema es movido mediante un motor de corriente continua controlado por inducido, acoplado a un reductor de relación  $n$  cuyo eje lento está unido a una polea. Es esta polea, a una distancia  $r$  del centro de giro, está enrollada la cuerda inextensible utilizada para tirar de la masa  $m$  hacia arriba. Dicha masa sufre una fricción proporcional a la fuerza normal a la superficie de deslizamiento mediante el coeficiente de fricción seca  $\mu$ .



Los parámetros asociados al sistema son los siguientes:

$R = 1\Omega$	Resistencia del inducido del motor
$K_p = 0.15 \text{ Nm/A}$	Cte. de par del motor
$K_e = 0.15 \text{ V/rad} \cdot \text{seg}^{-1}$	Cte. eléctrica del motor
$J = 0.01 \text{ Kg m}^2$	Inercia del motor
$f = 0.05 \text{ Nm/rad} \cdot \text{seg}^{-1}$	Fricción viscosa del eje del motor
$n = 100$	Relación de reducción
$r = 0.08\text{m}$	Radio de enrollamiento de la polea
$m = 100\text{Kg}$	Masa a elevar
$\mu = 0.4$	Coef. De fricción seca entre la masa $m$ y la superficie
$\alpha = 30^\circ$	Angulo de inclinación de la rampa

Se dispone de una dinamo tacométrica acoplada al eje del motor de ganancia  $K_w = 0.08 \text{ V/rad} \cdot \text{seg}^{-1}$

# Sistemas térmicos

## ▶ Resistencia térmica

$$R_{TH} = \frac{\text{cambio en la diferencia de temperatura}}{\text{cambio en el flujo de calor}} = \frac{dT}{dq} \qquad q = \frac{\Delta T}{R_{TH}}$$

## ▶ Capacitancia térmica

$$C_{TH} = \frac{\text{cambio en el calor almacenado}}{\text{cambio en la temperatura}} \qquad q = C_{TH} \dot{T} \qquad C_{TH} = mc$$

## ▶ Magnitudes

Magnitudes físicas	Sistema Internacional
$q$	$\frac{kcal}{s}$ o $\left(\frac{kJulio}{s} = kW\right)$
$T$	K
$c$	kcal/kg K
$R_{TH}$	K/W
$C_{TH}$	$\left[Ws / K = \frac{Julio}{K}\right]$ o $\frac{kcal}{K}$

## Analogías

Sistema térmico	Sistema eléctrico
Flujo de calor	Corriente
Temperaturas	Potencial
Resistencia térmica	Resistencia eléctrica
Inercia térmica	Capacidad eléctrica

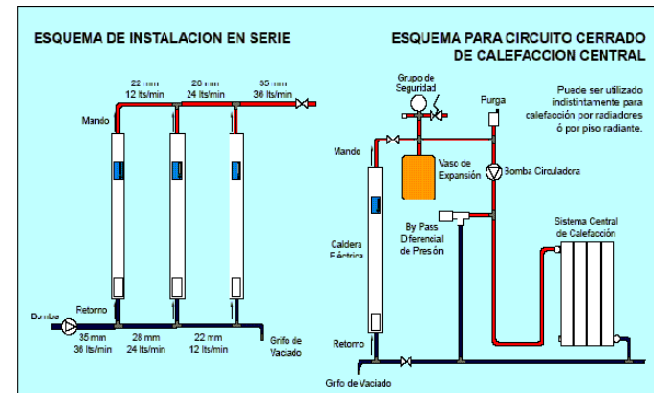
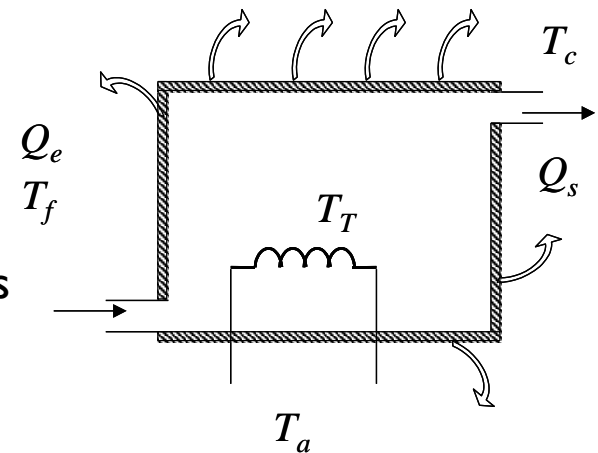
# Ejemplo 4.4

- ▶ Modelar el comportamiento dinámico de un calentador de agua caliente. Obtener la FDT entre la potencia entregada al calentador y la diferencia de temperatura entre el agua caliente y la fría.

$$q_{entregada} = m_T c \dot{T}_T + \left( \frac{T_T - T_a}{R_{TH}} \right) + \rho Q_e c (T_c - T_f)$$

- ▶ Si el caudal y la temperatura exterior son constantes

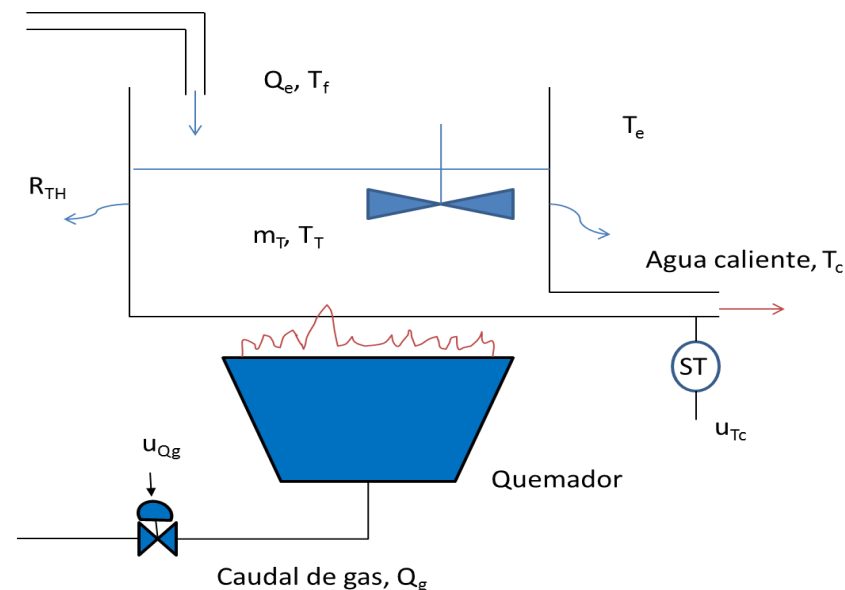
$$\frac{\Delta T_c(s)}{\Delta q_{entregado}(s)} = \frac{1}{C_{TH}s + \left( \frac{1}{R_{TH}} + \rho Q_e c \right)}$$



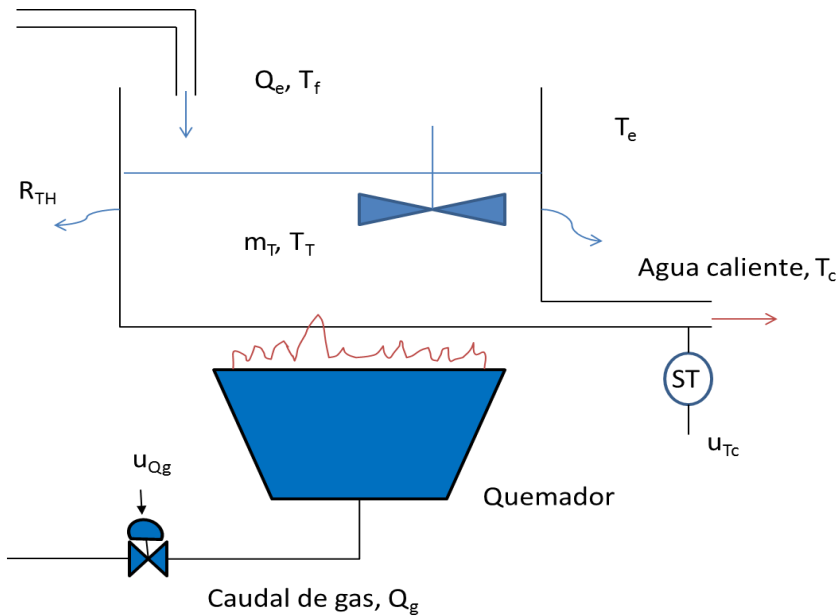
# Examen enero 2016

El esquema de la figura representa un calentador de agua. Siendo  $u_{T_c}$  la tensión del sensor de temperatura del agua caliente y  $u_{Q_g}$  la tensión que se aplica a la electroválvula que regula el caudal de gas que le llega al quemador. Se pide:

1. Determinar el conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales del calentador. Considérese proporcionales las relaciones entre las tensiones y los sensores o actuadores. La potencia del quemador es proporcional al caudal del gas.
2. Obtener el diagrama a bloque del calentador, indicando la variable de entrada, de salida y las perturbaciones.



# Examen enero 2016

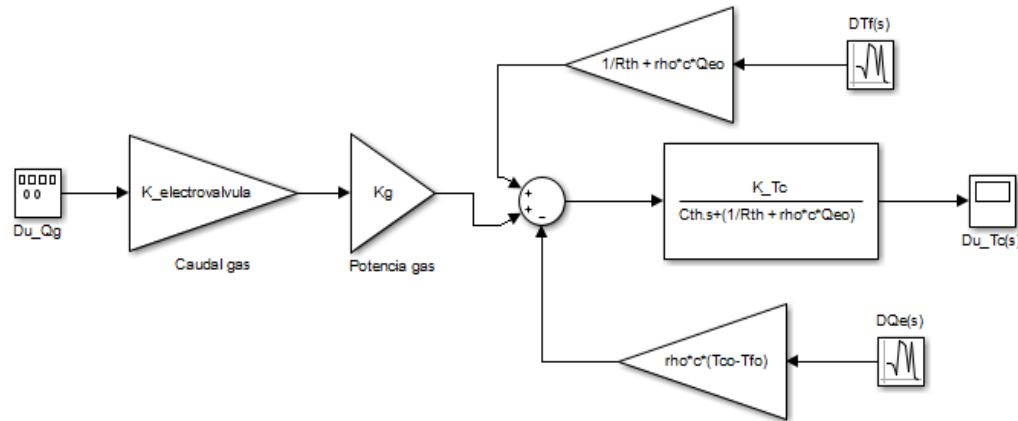


$$Q_g(t) = K_{electrovalvula} u_{Qg}(t)$$

$$p(t) = K_Q Q_g(t)$$

$$p(t) = m_T c_{H2O} \dot{T}_T(t) + \frac{T_T(t) - T_e(t)}{R_{TH}} + \rho_{H2O} Q_e(t) c_{H2O} (T_c(t) - T_f(t))$$

$$u_{Tc}(t) = K_{Tc} T_c(t)$$



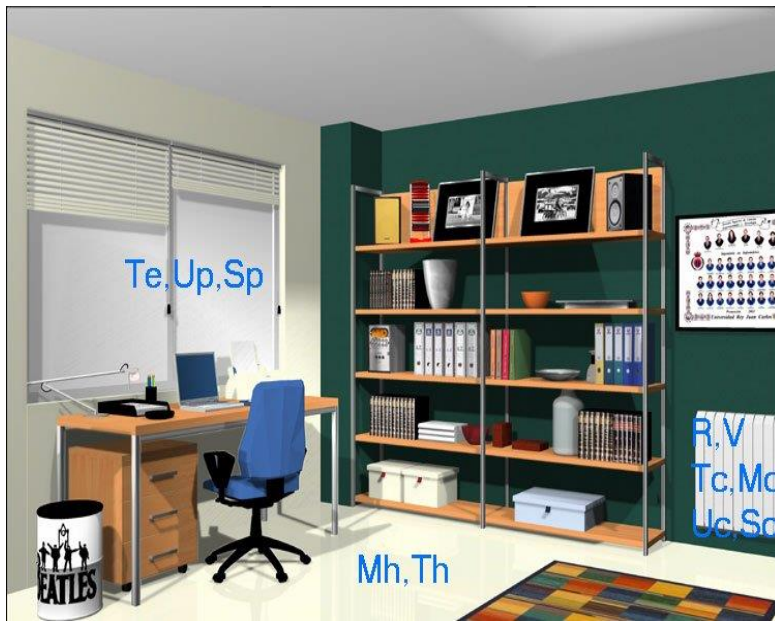


# Problema 3.4

La figura representa el esquema simplificado de la calefacción de una habitación por medio de un radiador eléctrico. El radiador consiste en una resistencia  $R$  alimentada a  $V$  voltios situada en un baño de aceite de masa calorífica  $M_c$  y temperatura  $T_c$ . Posee una superficie  $S_c$  de coeficiente global de transmisión  $U_c$  hacia el aire.

El aire de la habitación se encuentra a una temperatura  $T_h$  y tiene una masa calorífica  $M_h$ . La temperatura exterior es  $T_e$ . Las paredes tienen una superficie  $S_p$  y un coeficiente global de transmisión  $U_p$ .

La temperatura de la habitación se mide con un termómetro situado cerca del radiador, por lo que su indicación  $T_m$  viene afectada ligeramente por él. Dicha medida se compara con una referencia  $T_r$  y la diferencia, amplificada con un ganancia  $K$  se lleva a la resistencia del radiador.



$$1) T_m = 0.95T_h + 0.05T_c$$

$$2) V = k(T_r - T_m) \quad 3) q = 0.24V^2 / R$$

$$4) M_c \frac{dT_c}{dt} = q - U_c S_c (T_c - T_h)$$

$$5) M_h \frac{dT_h}{dt} = U_c S_c (T_c - T_h) - U_p S_p (T_h - T_e)$$

$$R = 20\Omega \quad k = 50V / ^\circ C \quad U_c S_c = 12.5cal / s^\circ C \quad U_p S_p = 33cal / s^\circ C$$

$$M_c = 1000cal / ^\circ C \quad M_h = 3000cal / ^\circ C$$

# Control de temperatura de la habitación

---

$$1) T_m = 0.95T_h + 0.05T_c$$

$$2) V = k(T_r - T_m) \quad 3) q = 0.24V^2 / R$$

$$4) M_c \frac{dT_c}{dt} = q - U_c S_c (T_c - T_h)$$

$$5) M_h \frac{dT_h}{dt} = U_c S_c (T_c - T_h) - U_p S_p (T_h - T_e)$$

I. Determinar el punto de equilibrio ( $T_{c,0}$  y  $T_{h,0}$ ) en torno a  $T_{e,0} = 5^\circ\text{C}$ ,  $T_{r,0} = 25^\circ\text{C}$ .

$$1) T_{m,0} = 0.95T_{h,0} + 0.05T_{c,0} \quad 2) V = k(T_{r,0} - T_{m,0}) \quad 3) q_0 = 0.24V_0^2 / R$$

$$4) 0 = q_0 - U_c S_c (T_{c,0} - T_{h,0}) \quad 5) 0 = U_c S_c (T_{c,0} - T_{h,0}) - U_p S_p (T_{h,0} - T_{e,0})$$

$$V_0 \approx 200V \quad q_0 = 480 \text{ cal/s} \quad T_{m,0} = 21^\circ\text{C} \quad T_{h,0} = 19.5^\circ\text{C} \quad T_{c,0} = 56.8^\circ\text{C}$$

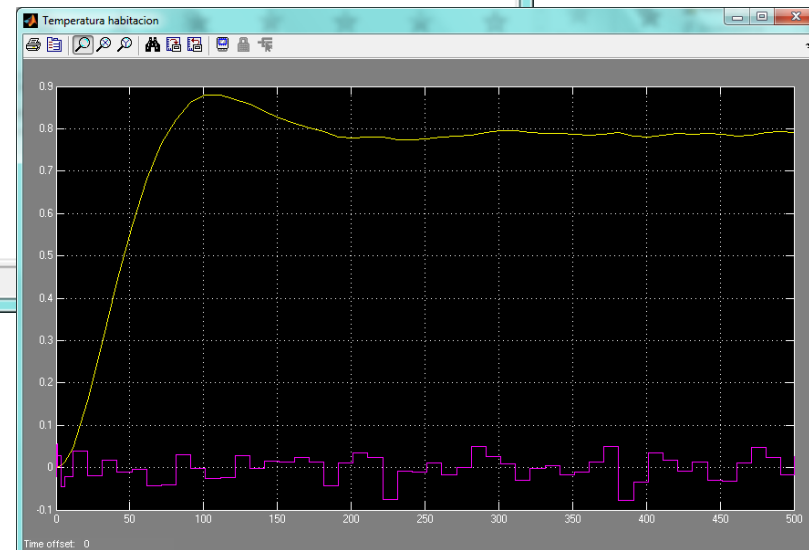
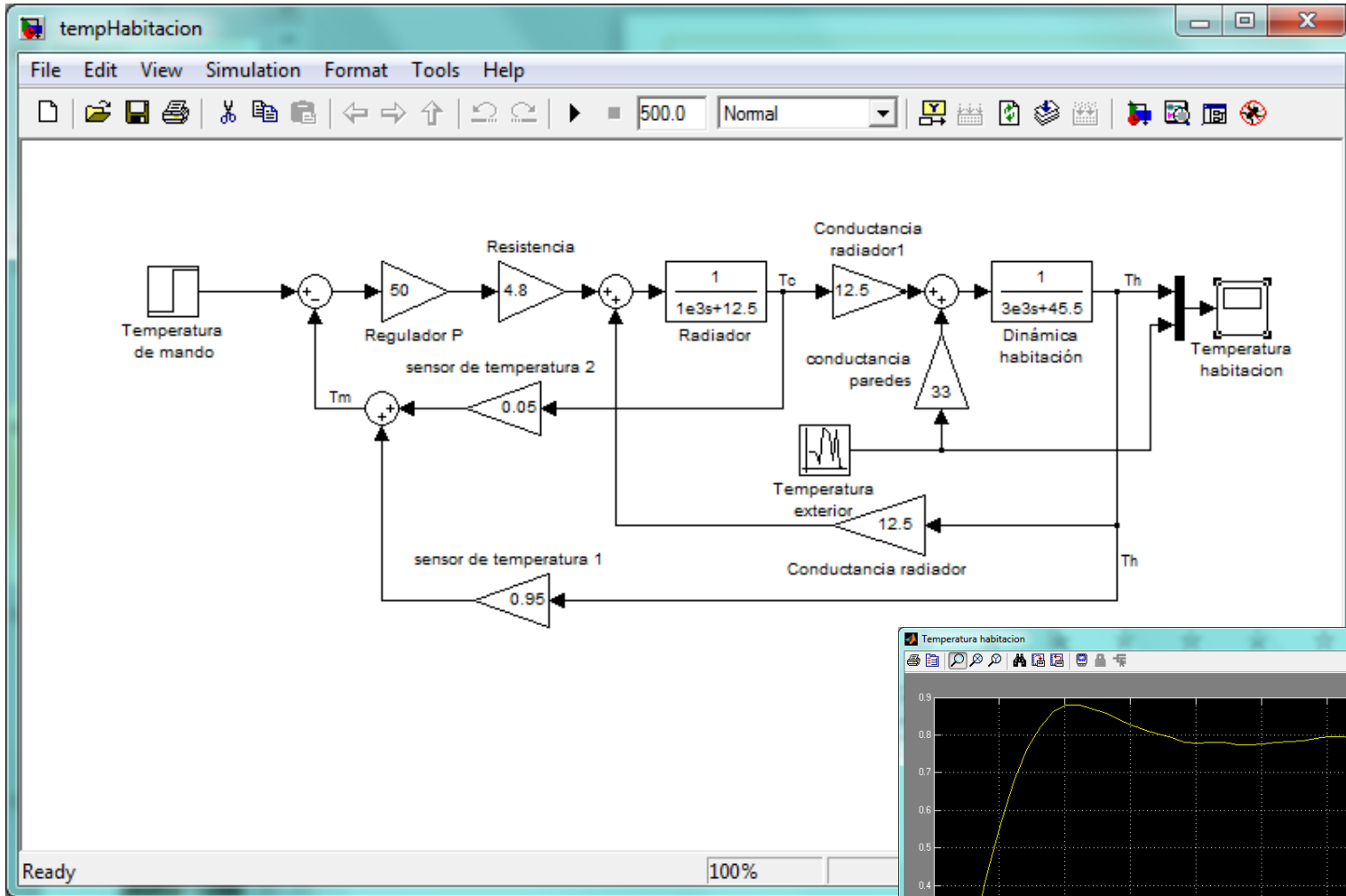
II. Linealizar las ecuaciones en torno al punto de equilibrio.

$$1) \Delta T_m(t) = 0.95\Delta T_h(t) + 0.05\Delta T_c(t) \quad 2) \Delta V(t) = k(\Delta T_r(t) - \Delta T_m(t))$$

$$3) \Delta q(t) = [0.24 \cdot 2V / R]_0 \Delta V(t) \quad 4) M_c \Delta \dot{T}_c(t) = \Delta q(t) - U_c S_c (\Delta T_c(t) - \Delta T_h(t))$$

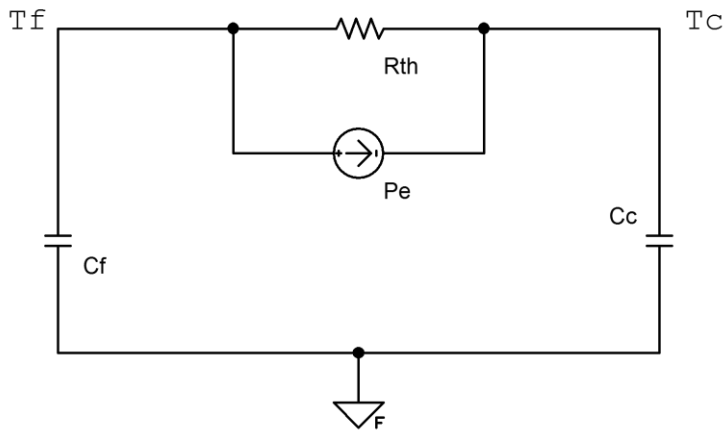
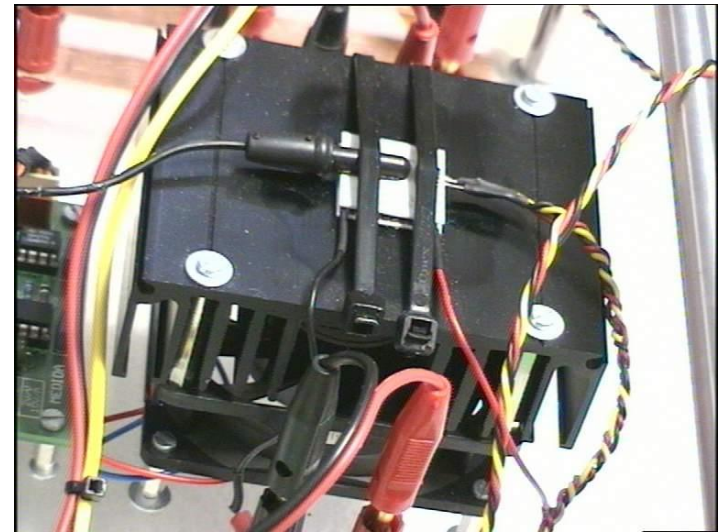
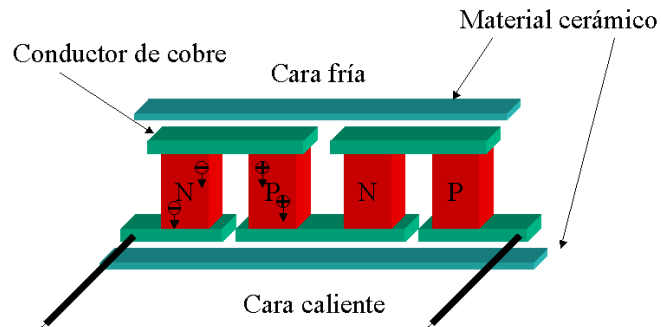
$$5) M_h \Delta \dot{T}_h(t) = U_c S_c (\Delta T_c(t) - \Delta T_h(t)) - U_p S_p (\Delta T_h(t) - \Delta T_e(t))$$

# Control de temperatura de la habitación



# Las células Peltier

## ► El efecto Peltier



$$P_e(t) \approx [\alpha T_c]_0 i_p(t)$$

$$p_e(t) \cong C_f \frac{d\Delta T}{dt} + \frac{\Delta T}{R_{TH}} \Rightarrow \frac{\Delta T(s)}{p_e(s)} = \frac{R_{TH}}{1 + C_f R_{TH} s}$$

# El equipo Peltier

